ពិជគណិតលីនេអ៊ែរ

ទ្រឹស្តី និង ការអនុវត្តន៍

បណ្ឌិត ស៊ាម ខ៉ុន

□□□□□□□□□ 2, 2016

មាតិកា

ជំពូក 1

លំហវ៉ិចទ័រ

1.1 លំហវ៉ិចទ័រ

និយមន័យ 1.1. $\mathbb{K}$ ជាកាយមួយមានលក្ខណៈត្រឡប់ [1]។ គេហៅថាលំហវ៉ិចទ័រលើ $\mathbb{K}$ ជាសំណុំ E មួយដែលនៅលើសំណុំនោះគេកំណត់ប្រមាណវិធីពីរ៖

a. ប្រមាណវិធីក្នុង(មានន័យថាជាអនុវត្តន៍មួយ $E \times E \to E$) ហៅថាប្រមាណវិធីបូក និង កំណត់សរសេរដោយ $+$ និង

b. ប្រមាណវិធីក្រៅដែលមានដែនកំណត់ $\mathbb{K}$ (មានន័យថាជាអនុវត្តន៍មួយ $\mathbb{K}\times E \to E$ ដែលកំណត់សរសេរ λx (រឺ $\lambda \cdot x$) ដែលជារូបភាពក្នុង E នៃគូ $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$) ។
លើសពីនេះ ប្រមាណវិធីទាំងពីរនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ ចំពោះគ្រប់ x, y និង z នៃ E និង ចំពោះគ្រប់ λ និង μ នៃ $\mathbb{K}$ ៖

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $x + y = y + x$
3. $x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x$ ($\mathbf{0}$ តាងធាតុអព្យាក្រិតនៃ E)
4. $x + (-x) = (-x) + x = \mathbf{0}$ ($-x$ ហៅថាធាតុផ្ទុយនៃ x)
5. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
7. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
8. $1 \cdot x = x$ (1 តាងធាតុព្យាក្រិតនៃប្រមាណវិធីគុណក្នុង $\mathbb{K}$)

គេកំណត់សរសេរលំហវ៉ិចទ័រ E លើកាយ $\mathbb{K}$ ដោយ $(E, +, \cdot)$ រឺ ដោយខ្លី E ។ ធាតុនៃ $\mathbb{K}$ ហៅថាស្កាលែរ និង ធាតុនៃ E ហៅថាវ៉ិចទ័រ។

[1] ជាទូទៅ ក្នុងការសិក្សាលំហវ៉ិចទ័រ $\mathbb{K}$ ជាកាយចំនួនពិត រឺ កាយនៃចំនួនកុំផ្លិច *i.e.* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ រឺ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

ឧទាហរណ៍ 1.1. សំណុំ $\mathbb{R}^n$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីពីរ ចំពោះគ្រប់ $(x_1, \cdots, x_n)$ និង $(y_1, \cdots, y_n)$ នៃ $\mathbb{R}^n$ និង ចំពោះគ្រប់ λ នៃ $\mathbb{R}$ ៖

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) := (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \tag{1.1}$$

$$\lambda(x_1 \cdots, x_n) := (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) \tag{1.2}$$

ជាលំហវិចទ័រលើកាយចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ។
នៅពេលនេះ $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)$ ជាធាតុអព្រាក្រឹតដែលគេហៅជាញឹកញាប់ថាវិចទ័រសូន្យ និង $(-x)$ ធាតុផ្ទុយនៃ $x = (x_1, \cdots, x_n)$ ហៅថាវិចទ័រផ្ទុយ ហើយវាជាវិចទ័រ $(-x_1, \cdots, -x_n)$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.2. សំណុំ $\mathbb{C}^n$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីពីរ ចំពោះគ្រប់ $(x_1, \cdots, x_n)$ និង $(y_1, \cdots, y_n)$ នៃ $\mathbb{C}^n$ និង ចំពោះគ្រប់ λ នៃ $\mathbb{C}$ ៖

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) := (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \tag{1.3}$$

$$\lambda(x_1 \cdots, x_n) := (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) \tag{1.4}$$

ជាលំហវិចទ័រលើកាយ $\mathbb{C}$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.3. ជាទូទៅ សំណុំ $\mathbb{K}^n$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីពីរ ចំពោះគ្រប់ $(x_1, \cdots, x_n)$ និង $(y_1, \cdots, y_n)$ នៃ $\mathbb{K}^n$ និង ចំពោះគ្រប់ λ នៃ $\mathbb{K}$ ៖

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) := (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \tag{1.5}$$

$$\lambda(x_1 \cdots, x_n) := (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) \tag{1.6}$$

ជាលំហវិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.4. $\mathbb{R}_n[x]$ ជាសំណុំនៃអនុគមន៍ពហុធាមានគុណក្នុង $\mathbb{R}$ មានដឺក្រេតូចជាង រឺ ស្មើនឹង n *i.e.*

$$\mathbb{R}_n[x] = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \, x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \, a_i \in \mathbb{R}, i \in [0, n]\} \tag{1.7}$$

ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីពីរ ចំពោះគ្រប់ $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ និង $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ នៃ $\mathbb{R}_n[x]$ និង ចំពោះគ្រប់ λ នៃ $\mathbb{R}$ ៖

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i := \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i \tag{1.8}$$

$$\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i := \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) x^i \tag{1.9}$$

ជាលំហវិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ។
នៅពេលនេះ វិចទ័រសូន្យ តាងដោយ $\mathbf{0}$ ជាពហុធាសូន្យ និង ពហុធាផ្ទុយនៃពហុធា p ជាពហុធា $(-p)$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.5. ជាទូទៅ $\mathbb{R}[x]$ ជាសំណុំនៃអនុគមន៍ពហុធាដែលអាចមានដឺក្រេទាំងអស់ និង មានគុណក្នុង $\mathbb{R}$ *i.e.*

$$\mathbb{R}[x] = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i,\, a_i \in \mathbb{R}]\} \tag{1.10}$$

ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីពីរ ចំពោះគ្រប់ $x \mapsto \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ និង $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ នៃ $\mathbb{R}[x]$ និង ចំពោះគ្រប់ λ នៃ $\mathbb{R}$ ៖

$$\sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i := \sum_{i=0}^{p} (a_i + b_i) x^i, \quad p = \max\{m, n\} \tag{1.11}$$

$$\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i := \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) x^i \tag{1.12}$$

ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.6. សំណុំ $\mathcal{F}(E, F)$ [2] នៃអនុវត្តន៍ពីសំណុំ E ទៅសំណុំ F *i.e.*

$$\mathcal{F}(E, F) = \{\text{អនុវត្តន៍ } f : E \to F\} \tag{1.13}$$

ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីពីរ ចំពោះគ្រប់ f និង g នៃ $\mathcal{F}(E, F)$ និង ចំពោះគ្រប់ λ នៃ $\mathbb{K}$ ៖

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) \tag{1.14}$$

$$(\lambda f)(a) = \lambda f(a) \tag{1.15}$$

ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ។
ធាតុអព្យាក្រិតជាអនុវត្តន៍សូន្យ តាងដោយ **0** និង ធាតុផ្ទុយនៃអនុវត្តន៍ f ជាអនុវត្តន៍ $(-f)$ *i.e.* $(-f)(a) = -f(a)$ ។
ជាពិសេស សំណុំស្វ៊ីត $\mathcal{U}$ មានតំលៃក្នុងសំណុំ E *i.e.* $\mathcal{U} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីពីរ ចំពោះគ្រប់ u និង v នៃ $\mathcal{U}$ និង ចំពោះគ្រប់ λ នៃ $\mathbb{K}$ ៖

$$(u + v)_n = u_n + v_n \tag{1.16}$$

$$(\lambda u)_n = \lambda u_n \tag{1.17}$$

ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ។
ធាតុអព្យាក្រិតជាស្វ៊ីតសូន្យ និង ធាតុផ្ទុយនៃស្វ៊ីត u ជាស្វ៊ីត $(-u)$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.7. សំណុំ $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ [3] នៃម៉ាទ្រីសទំហំ $n \times p$ (ក្នុងករណី $n = p$ គេកំណត់ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ហៅថា សំណុំម៉ាទ្រីសការេលំហំ n) មានមេគុណក្នុង $\mathbb{K}$ ប្រដាប់ដោយប្រ មាណវិធីពីរ ចំពោះគ្រប់ $A = (a_{ij})$ និង $B = (b_{ij})$ នៃ $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ និង ចំពោះគ្រប់ λ នៃ $\mathbb{K}$ ៖

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

[2] គេក៏កំណត់សរសេរផងដែរ F^E
[3] ជាញឹកញាប់ គេតាង $\mathbb{K}^{n\times p}$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

ជាលំហវិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ។
ធាតុអព្យាក្រិតជាម៉ាទ្រីសការេសូន្យ តាងដោយ $\mathbf{0}$ និង ធាតុផ្ទុយនៃម៉ាទ្រីសការេ A ជាម៉ាទ្រីស $(-A)$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.8. $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ ជា n លំហវិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ដូចគ្នា។ គេយក $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ និង សំណុំនេះប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីពីរ ចំពោះគ្រប់ $(x_1, \cdots, x_n)$ និង $(y_1, \cdots, y_n)$ នៃ E និង ចំពោះគ្រប់ λ នៃ $\mathbb{K}$ ៖

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) := (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \tag{1.20}$$

$$\lambda(x_1 \cdots, x_n) := (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) \tag{1.21}$$

ជាលំហវិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ដូចគ្នាដែរ ។ លំហនេះ ហៅថាលំហវិចទ័រផលគុណ។

សំណើ 1.1. $(E, +, \cdot)$ ជាលំហវិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ។ ចំពោះគ្រប់ $\lambda \in \mathbb{K}$ និង ចំពោះគ្រប់ $x \in E$ គេបាន

1. $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ និង $0 \cdot x = \mathbf{0}$
2. បើ $\lambda x = \mathbf{0}$ នោះ $\lambda = 0$ រឺ $x = \mathbf{0}$
3. $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda x)$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

1. យើងមាន $\lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0} + \lambda\mathbf{0}$ ។ ដូច្នេះ $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ។
   ដូចគ្នាដែរ $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$ ។ យើងបាន $0x = \mathbf{0}$ ។
2. យើងឧបមាថា $\lambda x = \mathbf{0}$ និង $\lambda \neq 0$ ។ ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង λ^{-1} យើងបាន $\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}\mathbf{0}$ *i.e.* $\lambda^{-1}(\lambda x) = \mathbf{0}$ ។ ដូច្នេះ $(\lambda^{-1}\lambda)x = \mathbf{0}$ រួច $1x = \mathbf{0}$ និង ជាចុងក្រោយ $x = \mathbf{0}$ ។
   ដូចគ្នាដែរ បើ $\lambda x = \mathbf{0}$ និង $x \neq \mathbf{0}$ គេបាន $\lambda = 0$ ព្រោះបើមិនដូច្នេះទេ $\lambda x \neq \mathbf{0}$ ដែលលទ្ធផលនេះផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។
3. ដោយយក $\mu = -1$ ក្នុងស្វ័យសត្យ 5 គេបាន $(-\lambda)x = \lambda(-x)$ ។ ជាថ្មីម្តងទៀត ដោយជំនួស λ ដោយ -1 និង μ ដោយ λ គេទទួលបាន $\lambda(-x) = -(\lambda x)$ ។

កំណត់សរសេរ 1.1. គេកំណត់សរសេរ $(-\lambda)x$ ដោយ $-\lambda x$ *i.e.* $(-x) = -x$ និង $x + (-y)$ ដោយ $x - y$ *i.e.* $x + (-y) = x - y$ ។

1.2 លំហវ៉ិចទ័ររង

និយមន័យ 1.2. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយ និង F ជាផ្នែកមួយមិនទទេនៃ E ។ គេថា F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E បើបង្រួមនៃប្រមាណវិធីនៃ E ទៅ F ធ្វើអោយ F ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយ។

ជាគោលការណ៍ ដើម្បីបង្ហាញថា F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E គេត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់ស្វ័យសត្យទាំងប្រាំបីនៃនិយមន័យ 1.1 ។ តាមពិត យើងចាំបាច់ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់ភាពស្ថាបនៃប្រមាណវីធីដែលអះអាងក្នុងសំណើ ខាងក្រោម។

សំណើ 1.2. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយ និង $F \subset E$ ។ ដូច្នេះ F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃ E លុះត្រាតែ

1. $F \neq \emptyset$
2. a. $x, y \in F \ \Rightarrow\ x + y \in F$
   b. $x \in F, \lambda \in \mathbb{K} \ \Rightarrow\ \lambda x \in F$

សំរាយបញ្ជាក់

1. ឧបមាថា F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E យើងបាន F ផ្ទៀងផ្ទតាត់ស្វ័យសត្យទាំងប្រាំបីនៃ និយមន័យ 1.1 ។ ដូច្នេះ យើងបាន $F \neq \emptyset$ ព្រោះ $x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x$ ចំពោះគ្រប់ $x \in F$ *i.e.* F មានធាតុអព្យាក្រិតមួយ។
   លើសពីនេះ លំហវ៉ិចទ័រ F ត្រូវបានប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីបូកក្នុង និងប្រមាណវីធី គុណក្រៅ ដូច E មានន័យថាចំពោះគ្រប់ $x, y \in F$ និងចំពោះគ្រប់ $\lambda \in \mathbb{K}$ គេបាន $x + y \in F$ និង $\lambda x \in F$ ។
2. ប្រាសមកវិញ ឧបមាថាល័ក្ខខ័ណ្ឌ1 និង 2 នៃ លក្ខណៈ 1.2 ផ្ទៀងផ្ទាត់។ យើងនឹងបង្ហាញ ថា F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយ។
   យើងឃើញថាស្វ័យសត្យ 1, 2, 5, 6, 7, 8 នៃនិយមន័យ 1.1 ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ធាតុ នៃ E ហើយដូច្នេះ វាផ្ទៀងផ្ទាត់ជាពិសេស ចំពោះគ្រប់ធាតុនៃ F (F សំណុំរងនៃ E) ។
   យើងនៅសល់តែបង្ហាញថា F មានធាតុអព្យាក្រិតមួយ និង ថាចំពោះគ្រប់ធាតុនៃ F មានធាតុផ្ទុយ (ក្នុង F)។
   យក $\mathbf{0}$ ជាធាតុអព្យាក្រិតនៃ E និង $x \in F$ ។ តាម 2b នៃសំណើ 1.2 យើងយក $\lambda = 0$ យើងបាន $\mathbf{0} \in F$ ។ ដូច្នេះ ធាតុអព្យាក្រិតនៃ E ជាធាតុនៃ F ហើយ យើងបាន $x + \mathbf{0} = x$ ចំពោះគ្រប់ $x \in F$ ព្រោះសមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ធាតុ $x \in E$ ។ ដូច្នេះស្វ័យសត្យ 3 នៃនិយមន័យ 1.1 ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ធាតុនៃ F ។
   ដូចគ្នាដែរ យើងយកជាថ្មីម្តងទៀត $\lambda = -1$ គេបាន $-x \in F$ ហើយដូច្នេះ ដូច្នេះស្វ័យ សត្យ 4 នៃនិយមន័យ 1.1 ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រាប់ធាតុនៃ F ដែរ ។

សំណើ 1.3. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយ និង $F \subset E$ ។ ដូច្នេះ F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃ E លុះត្រាតែ

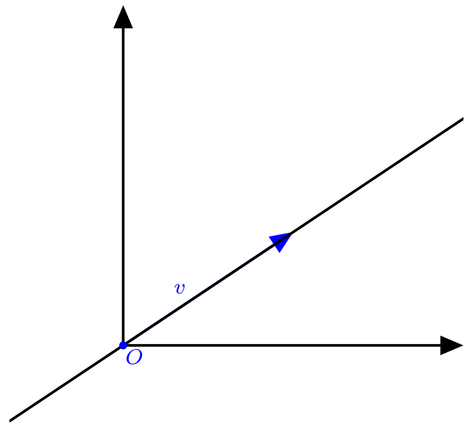
1. $F \neq \emptyset$
2. $x, y \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \ \Rightarrow\ \lambda x + \mu y \in F$

សំរាយបញ្ជាក់

ល័ក្ខខ័ណ្ឌចាំបាច់ពិតជាផ្ទៀងផ្ទាត់យ៉ាងងាយ *i.e.* F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃ E តាមសំណើ 1.2 យើងបាន $F \neq \emptyset$ ។ តាមសំណើនេះដដែល ចំពោះគ្រប់ $x, y \in F$ និង $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ យើងបាន $\lambda x, \mu y \in F$ ហើយដូច្នេះ $\lambda x + \mu y \in F$ ។
ច្រាស់មកវិញ បើល័ក្ខខ័ណ្ឌ 1 និង 2 នៃសំណើ 1.3 ផ្ទៀងផ្ទាត់ នោះចំពោះគ្រប់ $x, y \in F$ យើងបាន $x+y \in F$ $(\lambda = \mu = 1)$ និង $\lambda x \in F$ $(\mu = 0)$ ។ ដូច្នេះ F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃ E ។

ចំណាំ 1.1. យើងបានឃើញហើយថា នៅក្នុងសំរាយបញ្ជាក់ បើ F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃ E នោះ F ផ្ទុកជាចាំបាច់វ៉ិចទ័រសូន្យ។ ដូច្នេះ បើវ៉ិចទ័រសូន្យមិនមែនជាធាតុនៃ F ទេ នោះ F មិនមែនជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយទេ។

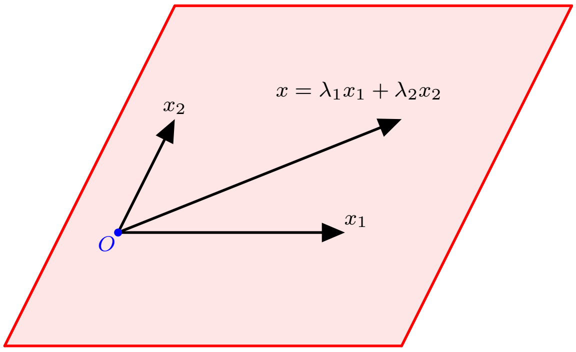
ឧទាហរណ៍ 1.9. យក $v \in E, v \neq \mathbf{0}$ យើងបាន $F = \{x \in E \mid \exists \lambda \in \mathbb{K}, x = \lambda v\}$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃ E ហៅថាបន្ទាត់វ៉ិចទ័របង្ករដោយវ៉ិចទ័រ v ។



រូប 1.1:

ដោយសារតែ ៖
$F \neq \emptyset$ ព្រោះ $v \in F$ ។
លើសពីនេះ F ស្ថាបចំពោះប្រមាណវិធីនៃ E ព្រោះ ចំពោះគ្រប់ $x, y \in F$ មាន $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ដែល $x = \lambda v, y = \mu v$ ហើយគេបាន $x - y = \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v \in F$ ។
ដូចគ្នាដែរ ចំពោះគ្រប់ $x \in F$ មាន $\lambda \in \mathbb{K}$ ដែល $x = \lambda v$ ហើយគេបាន $\mu x = \mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v \in F$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.10. យក $x_1, x_2 \in E$ និង $F = \{x \in E \mid \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\}$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E ហៅថាលំហវ៉ិចទ័ររងបង្ករដោយ x_1 និង x_2 ។ បើ x_1 និង x_2 មិនសូន្យ និង x_2 មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់វ៉ិចទ័របង្ករដោយ x_1 នោះ F ហៅថាប្លង់វ៉ិចទ័របង្ករដោយ x_1 និង x_2 ។

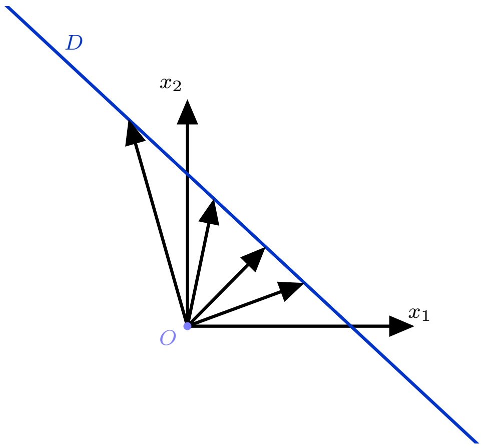


រូប 1.2:

ឧទាហរណ៍ 1.11. ជាទូទៅ យក $x_1, \cdots, x_p \in E$ នោះ $F = \{x \in E | \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}, x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p\}$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E កំណត់សរសេរដោយ $[x_1, \cdots, x_p]$ និង ហៅថាលំហវ៉ិចទ័ររងបង្ករដោយ $[x_1, \cdots, x_p]$ រឺ គេក៏ថាផងដែរលំហនៃបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ $x_1, \cdots, x_p$ ។

យើងនឹងឃើញនៅផ្នែកបន្ទាប់លំហរងនៃប្រភេទនេះ មានន័យថាលំហទទួលបានដោយបន្សំ លីនេអ៊ែរនៃគ្រួសារនៃធាតុនៃ E ។

ចំណាំ 1.2. យើងយកបំណកស្រាយធរណីមាត្រនៃលំហវ៉ិចទ័ររង។ E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយនៃវ៉ិចទ័រ ដែលកាត់តាមគល់ O ។ បន្ទាត់វ៉ិចទ័រមួយជាបន្ទាត់មួយដែលកាត់តាម O ។ ដូចគ្នាដែរប្លង់វ៉ិចទ័រមួយ ជាប្លង់មួយដែលកាត់តាម O ។ ជាទូទៅ លំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃ $\mathbb{R}^n$ អាចត្រូវបានមើលឃើញដូចជា "ប្លង់មានវិមាត្រ p"មួយដែលកាត់តាម O ។ គេអាចអោយអត្ថន័យពិតប្រាកដទៅនឹងសញ្ញាណនៃ " ប្លង់មានវិមាត្រ p" ប៉ុន្តែសញ្ញាណនេះមិនចាំបាច់ទេនៅទីនេះ។ យើងចងចាំនៅពេលនេះថាប្លង់នៃ លំហវ៉ិចទររងមួយត្រូវកាត់តាម O ព្រោះគ្រប់លំហវ៉ិចទ័ររងត្រូវតែផ្ទុកវ៉ិចទ័រសូន្យ។
ដូច្នេះ ជាឧទាហរណ៍ បន្ទាត់មួយដែលមិនកាត់តាម O មិនមែនជាលំហវ៉ិចទ័ររងទេ ព្រោះចំណុចនៃបន្ទាត់ជាចុងនៃវ៉ិចទ័រគូលចេញពី O ហើយ ដូច្នេះ វាគ្មានវ៉ិចទ័រសូន្យក្នុងចំណោមវ៉ិចទ័រទាំងនេះ។



រូប 1.3:

ឧទាហរណ៍ 1.12. យក $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + 3z = 0\}$ ។ ដូច្នេះ យើងបាន F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathbb{R}^3$ ។

បំណកស្រាយ

1. ជាការពិតណាស់ $F \neq \emptyset$ ដូចជា $(2, -1, 0) \in F$ ។
2. ឥឡូវនេះ យើងយក $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F$ ។
   យើងបាន $x_1 + 2y_1 + 3z_1 = 0$ និង $x_2 + 2y_2 + 3z_2 = 0$ ។
   ដោយបូកអង្គរ និង អង្គរ យើងទទួលបាន $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = 0$ ហើយ ដូច្នេះ $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in F$ ។
3. ចំពោះគ្រប់ $\lambda \in \mathbb{R}$ និង គ្រប់ $v = (x, y, z) \in F$ យើងបាន $x + 2y + 3z = 0$ ។ ដូច្នេះ ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង λ យើងបាន $\lambda x + 2\lambda y + 3\lambda z = 0$ ។ យើងបាន $\lambda v \in F$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.13. យក $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + 3z = 4\}$ ។ ដូច្នេះ យើងបាន F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathbb{R}^3$ ។

សំណើ 1.4. F និង G ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃពីរនៃ E ។ យើងបាន

1. $F \cap G$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E
2. ជាទូទៅ $F \cup G$ មិនមែនជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E
3. បំពេញ $E \setminus F$ នៃលំហវ៉ិចទ័ររង F មិនមែនជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E ។

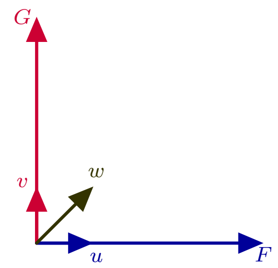
សំរាយបញ្ជាក់

1. ជាការពិតណាស់ $F \cap G \neq \emptyset$ ព្រោះ $\mathbf{0} \in F$ និង $\mathbf{0} \in G$ *i.e.* $\mathbf{0} \in F \cap G$ ។

យក $x,y \in F\cap G$ យើងបាន $x,y\in F$ និង $x,y\in G$ ។ ដូច្នេះ $x+y\in F$ និង $x+y\in G$ មានន័យថា $x+y\in F\cap G$ ។

យក $\lambda\in\mathbb{K}$ និង $x\in F\cap G$ យើងបាន $x\in F$ និង $x\in G$ ។ ដូច្នេះ $\lambda x\in F$ និង $\lambda x\in G$ ពោលគឺ $\lambda x\in F\cap G$ ។

2. ជាទូទៅ $F\cup G$ មិនស្ថាបចំពោះប្រមាណវិធីបូក។ ឧទាហរណ៍ដូចជា $E=\mathbb{R}^2$ រួច F និង G ជាបន្ទាត់វិចទ័របង្ករដោយវិចទ័រ $(1,0)$ និង $(0,1)$ រៀងគ្នា។
ដូច្នេះ យើងបាន ៖
$u=(1,0)\in F$ ដូច្នេះ $u\in F\cup G$
$v=(1,0)\in G$ ដូច្នេះ $v\in F\cup G$
ប៉ុន្តែ $w=u+v=(1,1)\neq F\cup G$ ។



រូប 1.4:

3. យើងឃើញថា $0\in E\setminus F$ ។ ដូច្នេះ វាមិនមែនជាលំហវិចទ័ររងនៃ E ។

1.3 គោលក្នុងលំហវិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់

និយមន័យ 1.3. គ្រួសារមួយនៃវិចទ័រ $(v_i)_{1\le i\le p}$ នៃលំហវិចទ័រ E ហៅថាគ្រួសារបង្ករ បើ $E=[v_1,\cdots,v_p]$ មានន័យថា

$$\forall x\in E\ \exists\lambda_1,\cdots,\lambda_p\in\mathbb{K},\ x=\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_pv_p \tag{1.22}$$

គេក៏និយាយផងដែរថាចំពោះគ្រប់ x នៃ E បំបែកនៅលើវិចទ័រ $(v_i)_{1\le i\le p}$ រឺក៏ x នៃ E ជាបន្សំ លីនេអ៊ែរនៃវិចទ័រ $(v_i)_{1\le i\le p}$ ។

ចំណាំ 1.3. គ្រួសារកំណត់បែបនេះមិនមានជានិច្ចជកាលទេ។ ឧទាហរណ៍ យើងយក $\mathbb{R}[x]$ ជា មួយនឹងទំរង់នៃលំហវិចទ័រកំណត់ដោយ 1.5 និង $(p_i)_{1\le i\le n}$ ជាគ្រួសារកំណត់នៃពហុធា។ គ្រួ សារនេះមិនអាចបង្ករ ព្រោះតាមបន្សំលីនេអ៊ែរ គេនឹងទទួលបានតែពហុធាដែលមានដឺក្រេតូច ជាង រឺស្មើនឹង $\max\limits_{1\le i\le n}\deg(p_i)$

ឧទាហរណ៍ 1.14. ក្នុង $\mathbb{R}^2$ គ្រួសារ $e_1=(1,0),e_2=(0,1)$ ជាគ្រួសារបង្ករ ព្រោះគ្រប់ $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ គេអាចសរសេរ

$$x=x_1(1,0)+x_2(0,1)=x_1e_1+x_2e_2 \tag{1.23}$$

ជាទូទៅក្នុង $\mathbb{R}^n$ គេយក

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, \cdots, 0)\\
e_2 &= (0, 1, 0, \cdots, 0)\\
&\vdots\\
e_k &= (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{\text{តួទី } k}, 0, \cdots, 0)\\
&\vdots\\
e_n &= (0, \cdots, 0, 1)
\end{aligned} \tag{1.24}$$

យើងបាន គ្រួសារ $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ ជាគ្រួសារបង្កករ ព្រោះគ្រប់ $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ គេបាន

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 \cdots + x_ne_n \tag{1.25}$$

ឧទាហរណ៍ 1.15. ក្នុង $\mathbb{R}^2$ គេយកគ្រួសារមួយដែលផ្ទុកគ្រួសាបង្ករ $\{e_1, e_2\}$ ដូចជា (e_1, e_2, v) ជាមួយនឹង $v = \{1, 2\}$ ។
ជាការពិតណាស់គរួសារនេះ ជាគ្រួសារបង្កករ ព្រៅគ្រប់ $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ គេអាចសរសេរ

$$(x_1, x_2) = x_1e_1 + x_2e_2 + 0v$$

ដូច្នេះលទ្ធផលដ៏សំខាន់មួយគឺគ្រប់គ្រួសារទាំងអស់ដែលផ្ទុកគ្រួសារបង្ករមួយជាគ្រួសារបង្កករ។

ឧទាហរណ៍ 1.16. ក្នុង $\mathbb{R}^2$ គេយក $v_1 = (1, 1)$ និង $v_2 = (1, -1)$ ។ យើងនេងបង្ហាញថា $\{v_1, v_2\}$ ជាគ្រួសាបង្ករ។

យើងយក $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថាមាន $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ដែល $x = x_1v_1 + x_2v_2$ មានន័យថា $(a, b) = (x_1, x_2) + (x_2, -x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ ។
ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b មាន $x_1, x_2\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x_1 + x_2 = a \text{ និង } x_1 - x_2 = b$$

ដោយដោះស្រាយ យើងទទួលបាន $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ និង $x_2 = \dfrac{a-b}{2}$ ហើយ ដូច្នេះ $\{v_1, v_2\}$ ជាគ្រួសាបង្ករ។

និយមន័យ 1.4. លំហវិចទ័រមួយហៅថាមានវិមាត្រកំណត់បើវាមានគ្រួសារបង្ករកំណត់។ ក្នុង ករណីផ្ទុយ គេថាវាមានវិមាត្រមិនកំណត់។

ឧទាហរណ៍ 1.17. លំហវិចទ័រ $\mathbb{R}^n$ មានវិមាត្រកំណត់។ ចំណែកឯលំហវិចទ័រ $\mathbb{R}[x]$ មានវិមាត្រ មិនកំណត់។ ដូចគ្នាដែរ $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\text{អនុវត្តន៍ } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ មានវិមាត្រមិនកំណត់ ព្រោះ $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \supset \mathbb{R}[x]$ ។

និយមន័យ 1.5. $\{v_1, \cdots, v_n\}$ ជាគ្រួសារនៃធាតុនៃលំហវិចទ័រ E ។ គេថាវាជាគ្រួសារសេរី បើ

$$\lambda_1v_1 + \cdots + \lambda_pv_p = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \cdots, \lambda_p = 0 \tag{1.26}$$

គេក៏ថាផងដែរ $v_1, \cdots, v_p$ ជាគ្រសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។ គ្រួសារមួយមួយដែលមិនសេរី ហៅថាគ្រួសារភ្ជាប់ (គេក៏ថាផងដែរវិចទ័ររបស់វាអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ) ។

ឧទាហរណ៍ 1.18. ក្នុង $\mathbb{R}^3$ វិចទ័រ $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (-1,3,1)$ និង $v_3 = (-1,13,5)$ ជាគ្រួសារភ្ជាប់។

បំណកស្រាយ

យើងបាន $2v_1 + 3v_2 - v_3 = \mathbf{0}$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.19. ក្នុង $\mathbb{R}^3$ វិចទ័រ $v_1 = (1,1,-1)$, $v_2 = (0,2,1)$ និង $v_3 = (0,0,5)$ ជាគ្រួសារសេរី។

បំណកស្រាយ

ឧបមាថាមានចំនួនពិត $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ដែល $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \mathbf{0}$ *i.e.*

$$\lambda_1(1,1,-1) + \lambda_2(0,2,1) + \lambda_3(0,0,5) = \mathbf{0}$$

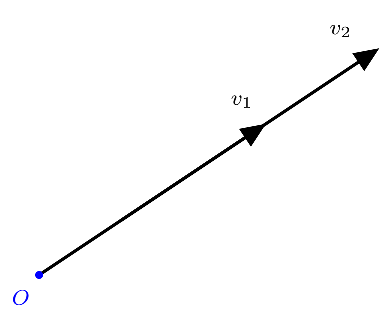
យើងបាន

$$\lambda_1, \lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0$$

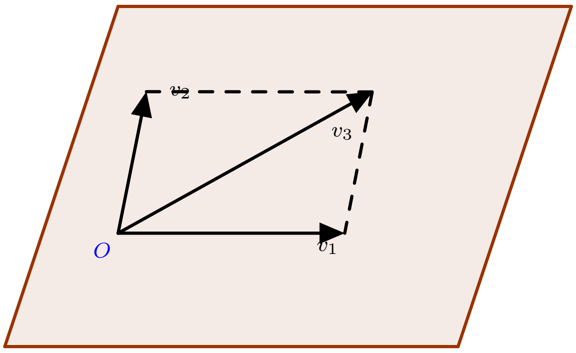
ដូច្នេះ

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \textit{i.e. } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

សំណើ 1.5. គ្រួសារ $\{v_1, \cdots, v_p\}$ មួយជាគ្រួសារភ្ជាប់លុះត្រាតែមួយនៃវិចទ័រ v_i សរសេរជា បន្សំលីនេអ៊ែរនៃវិចទ័រផ្សេងទៀតនៃគ្រួសារ(ពោលគឺមួយនៃ v_i ស្ថិតក្នុងលំហបង្ករដោយវិចទ័រ ផ្សេងទៀត)។
រឺក៏ តាមបែបសមមូល
គ្រួសារ $\{v_1, \cdots, v_p\}$ មួយជាគ្រួសារសេរីលុះត្រាតែគ្មានវិចទ័រណាមួយនៃវិចទ័រ v_i ស្ថិតក្នុង លំហបង្ករដោយវិចទ័រផ្សេងទៀត)។ សូមមើលរូបបង្ហាញនៅក្នុងរូប



រូប 1.5:



រូប 1.6:

សំរាយបញ្ជាក់

បើ $\{v_1, \cdots, v_p\}$ ជាគ្រួសារភ្ជាប់ នោះមានស្កាលែរ $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ មិនសូន្យទាំងអស់ដែល $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = \mathbf{0}$ ។ បើ $\lambda_1 \neq 0$ គេអាចសរសេរ

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \cdots + (\frac{-\lambda_p}{\lambda_1}) v_p$$

ច្រាស់មកវិញ ឧបមាថា v_1 ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ $v_2, \cdots, v_p$ ។ ដូច្នេះ មាន $\mu_2, \cdots, \mu_p \in \mathbb{K}$ ដែល $v_1 = \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_p v_p$ មានន័យថា $v_1 - \mu_2 v_2 - \cdots - \mu_p v_p = \mathbf{0}$ ។ ដូច្នេះមានមានបន្សំលីនេ អ៊ែរមួយនៃ $\{v_1, \cdots, v_p\}$ ដែលស្មើនឹងសូន្យ ដោយគ្មានមេគុណស្មើសូន្យទាំងអស់។

ផលប្រយោជន៍នៃគ្រួសារសេរីត្រូវក្នុងសំណើខាងក្រោម៖

សំណើ 1.6. គ្រួសារ $\{v_1, \cdots, v_p\}$ ជាគ្រសារសេរីមួយ និង x ជាវ៉ិចទ័រមួយនៃលំហបង្ករដោយវ៉ិចទ័រ v_i (មានន័យថា x ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ v_i)។ ដូច្នេះ ការបំបែកវ៉ិចទ័រ x លើវ៉ិចទ័រ v_i មានតែមួយគត់។

សំរាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា វ៉ិចទ័រ x បំបែកបានពីររបៀបលើវ៉ិចទ័រ v_i ។ ដូច្នេះ មាន $\lambda_i, \mu_i, \ i = 1, 2, \cdots, p$ ដែល

$$x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$
$$x = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_p v_p$$

ដោយធ្វើផលដក យើងទទួលបាន

$$\mathbf{0} = (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_p - \mu_p) v_p$$

ដោយសារតែ $(v_i)_1 \leq i \leq p$ ជាគ្រួសារបង្ករ យើងទាញបាន $\lambda_1 - \mu_1 = 0, \cdots, \lambda_p - \mu_p = 0$ មានន័យថា $\lambda_1 = \mu_1, \cdots, \lambda_p = \mu_p$ ។

និយមន័យ 1.6. គ្រួសារមួយនៃលំហវ៉ិចទ័រហៅថាគោល បើវាជាគ្រួសារសេរីផងនឹងគ្រួសារបង្ករផង។

ដូច្នេះ យើងបានយ៉ាងងាយសំណើខាងក្រោម។

សំណើ 1.7. គ្រួសារ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ ជាគោលមួយនៃលំហវ៉ិចទ័រ E ។ ចំពោះគ្រប់ $x \in E$ បំបែកបានតែមួយគត់លើវ៉ិចទ័រ v_i មានន័យថា

$$\forall x \in E,\ \exists!(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \tag{1.27}$$

សំរាយបញ្ជាក់

1. គ្រួសារ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ ជាគ្រួសារបង្កករ។ ដូច្នេះ តាមនិយមន័យ 1.3 យើងបានអត្ថិភាពនៃ ការបំបែកនៃវ៉ិចទ័រ $x \in E$ ។
2. គ្រួសារ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ ជាគ្រួសារសេរី។ ដូច្នេះ តាមសំណើ 1.6 យើងបានភាពមានតែមួយ គត់នៃការបំបែកនៃ $x \in E$ លើគោល $\{v_1, \cdots, v_n\}$ ។

សំណើ 1.8. $B = \{v_1 \cdots v_n\}$ ជាគោលមួយនៃ E ។ ដូច្នេះមានអនុវត្តន៍មួយទល់មួយចំនួនមួយ

$$\begin{array}{cccc} \varphi_B & : & E & \to & \mathbb{K}^n \\ & & x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n & \mapsto & (x_1, \cdots, x_n) \end{array}$$

ស្កាលែរ x_i ហៅថាកំប៉ូសង់នៃវ៉ិចទ័រ x ក្នុងគោល B ។

សំរាយបញ្ជាក់

1. ចំពោះគ្រប់ $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ មានវ៉ិចទ័រ x មួយនៃ E ដែល $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ ។ ដូច្នេះ φ_B ជាអនុវត្តន៍ពេញ។
2. យក $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n, y = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n \in E$ ដែល $\varphi_B(x) = \varphi_B(y)$ ។ ដូច្នេះ មាន $(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n)$ រួច $x = y$ ។ ដូច្នេះ φ_B ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។

សរុបមក φ_B ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

ឧទាហរណ៍ 1.20 (គោលកាណូនិចនៃ $\mathbb{K}^n$). គ្រួសារនៃវ៉ិចទ័រ $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ កំណត់ក្នុងសមីការ (1.23) ជាគោលមួយ ហៅថាគោលកាណូនិចនៃលំហវ៉ិចទ័រ $\mathbb{K}^n$ ។

បំណកស្រាយ

1. យើងបានឃើញនៅក្នុងឧទាហរណ៍ 1.14 ថាគ្រួសារនេះ ជាគ្រួសារបង្កករ។ យើងនឹងបង្ហាញ ថាវាជាគ្រួសារសេរី។
2. យក $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ដែល $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = \mathbf{0}$ ។
   យើងបាន
   $$\lambda_1(1, 0 \cdots 0) + \cdots + \lambda_n(0, \cdots, \lambda_n(0 \cdots 0, 1) = \mathbf{0}$$
   ពោលគឺ
   $$(\lambda_1, 0, \cdots, 0) + \cdots + (0, \cdots, 0.\lambda_n) = (0, \cdots, 0)$$
   ដូច្នេះ $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = 0$ រួច $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ ។
   វិបាក $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ ជាគ្រួសារសេរី។

ឧទាហរណ៍ 1.21. (គោលកាណូនិចនៃ $\mathbb{R}_n[x]$) គ្រួសារ $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ ជាគោលមួយ ហៅថា គោលការណូនិចនៃលំហ $\mathbb{R}_n[x]$ នៃពហុធាដឺក្រេតូចជាង រឺស្មើនឹង n ។

បំណកស្រាយ

1. ចំពោះគ្រប់ $p \in \mathbb{R}_n[x]$ យើងអាចសសរ $p = a_0 1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ជាមួយនឹង $a_i \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ $\mathcal{B}$ ជាគ្រួសារបង្កើត។
2. លើសពីនេះ យក $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ដែល $\lambda_0 1 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n = \mathbf{0}$ ។ តាមលក្ខណៈនៃពហុធា យើងបាន $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots \lambda_n = 0$ ។ ដូចនេះ $\mathcal{B}$ ជាគ្រួសារសេរី។

ឧទាហរណ៍ 1.22. គ្រួសារ $\mathcal{B} = \{M_{11}, \cdots M_{1n}, M_{21}, \cdots, M_{2n}, M_{n1}, \cdots, M_{nn}\}$ កំណត់ដោយ

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \underbrace{1}_{\text{ជួរដេកទី } i \text{ និង ជួរឈរទី } j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{1.28}$$

បំណកស្រាយ

1. ចំពោះគ្រប់ម៉ាទ្រីស $M = (m_{ij})_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n}}$ យើងអាចសរសេរ

$$M = m_{11}M_{11} + \cdots + m_{1n}M_{1n} + m_{21}M_{21} + \cdots + m_{2n}M_{2n} + \cdots + m_{n1}M_{n1} + \cdots + m_{nn}M_{nn} \tag{1.29}$$

រឺ យ៉ាងខ្លី

$$M = \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}M_{ij} \tag{1.30}$$

ដូច្នេះ $\mathcal{B}$ ជាគ្រួសារបង្កើត។

2. លើសពីនេះ បើ $\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}M_{ij} = \mathbf{0}$ យើងបាន $\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ ។ ដូច្នេះ $m_{ij} = 0$ ចំពោះគ្រប់ $i, j = 1, 2 \cdots, n$ រួច $\mathcal{B}$ ជាគ្រួសារសេរី។

ឧទាហរណ៍ 1.23. សំណុំ $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + 3z = 0\}$ ក្នុងឧទាហរណ៍ 1.12 ជាលំហវ៉ិចទ័ររង នៃ $\mathbb{R}^3$ ។ កំណត់គោលនៃលំហវ៉ិចទ័រ F ។

បំណកស្រាយ

1 យក $v=(x,y,z)\in F$ យើងបាន $x+2y+3z=$ *i.e.* $x=-2y-3z$ ។ ដូច្នេះ

$$v=(-2y-3z,y,z)=y(-2,1,0)+z(-3,0,1)=yv_1+zv_2$$

ដែល $v_1=(-2,1,0)$ និង $v_2=(-3,0,1)$ ។
ដូច្នេះ វ៉ិចទ័រ v_1 និង v_2 បង្កើតបានជាគ្រួសារបង្ករមួយនៃ F ។

2 លើសពីនេះ វាជាគ្រួសារសេរី។ ដោយហេតុថា បើ $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ ដែល $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2=\mathbf{0}$ យើងនឹងទទួលបាន $(-2\lambda_1-3\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2)=(0,0,0)$ ។ ដូច្នេះ $\begin{cases}-2\lambda_1 & -3\lambda_1 & = & 0\\ \lambda_1 & & = & 0\\ & \lambda_2 & = & 0\end{cases}$ ជាពិសេស $\lambda_1=\lambda_2=0$ ។

សំណើ 1.9. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយ។

1. គ្រួសារទោល $\{x\}$ សេរី លុះត្រាតែ $x\neq\mathbf{0}$ ។
2. គ្រប់គ្រួសារទាំងអស់ដែលផ្ទុកគ្រួសារបង្ករជាគ្រួសារបង្ករ។
3. គ្រប់គ្រួសាររងនៃគ្រួសារសេរីជាគ្រួសារសេរី។
4. គ្រប់គ្រួសារទាំងអស់ដែលផ្ទុកគ្រួសារភ្ជាប់ជាគ្រួសារភ្ជាប់។
5. គ្រប់គ្រួសារ $\{v_1,\cdots,v_n\}$ ដែលមួយនៃវ៉ិចទ័រ v_i ស្មើនឹងសូន្យ ជាគ្រួសារភ្ជាប់។

សំរាយបញ្ជាក់

1. តាមលក្ខណៈ 1 នៃសំណើ 1.1 យើងបាន បើ $\lambda x=\mathbf{0}$ នោះ $\lambda=0$ រឺ $x=\mathbf{0}$ ។ ដូច្នេះ បើ $x\neq\mathbf{0}$ នោះ $\lambda x=\mathbf{0}$ បណ្តាលអោយបាន $\lambda=0$ ។ ដូច្នេះ $\{x\}$ ជាគ្រសារសេរី។
ច្រាសមកវិញ ឧបបាថា $\{x\}$ ជាគ្រួសារសេរី នោះ យើងបាន $\lambda x=\mathbf{0}$ បណ្តាលអោយ $\lambda=0$ និង $x\neq\mathbf{0}$ (បើមិនដូច្នេះទេ $\{x\}$ មិនជាគ្រួសារសេរី)។
2. ឧបមាថា $F=\{v_1,\cdots,v_p\}$ ជាគ្រួសារបង្ករមួយនៃ E ។ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ x នៃ E យើងបាន
$$x=\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_pv_p$$
ឥឡូវ យក $F'=\{v_1,\cdots,v_p,w_1,w_2,\cdots,w_q\}$ ជាគ្រួសារមួយនៃ E ដែលផ្ទុក F ។ ចំពោះគ្រប់ x នៃ E យើងអាចសរសេរ
$$x=\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_pv_p+0w_1+\cdots+0w_q$$
ដូច្នេះ $x\in[v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q]$ ។
3. ឧបមាថា $F=\{v_1,\cdots,v_p\}$ ជាគ្រួសារសេរី។ ដោយមិនបផ្លស់ប្តូរលំដាបើ យក $F'=\{v_1,\cdots,v_k\}$ ជាគ្រួសាររងនៃ F ។ គ្រួសារចុងក្រោយនេះ ជាគ្រួសារសេរី។ ដោយសារតែ បើមិនដូច្នេះទេ មួយនៃវ៉ិចទ័រ $v_1,\cdots,v_k$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃវ៉ិចទ័រផ្សេងទៀត។ ដូច្នេះមាន ធាតុមួយនៃ F ក៏ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃវ៉ិចទ័រផ្សេងទៀតនៃ F ។ លទ្ធផលនេះមិនអាចមានទេ ព្រោះ F ជាគ្រួសារសេរី។

4. យក $F=\{v_1,\cdots,v_p\}$ ជាគ្រួសារភ្ជាប់ និង $G=\{v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q\}$ ជាគ្រួសារ មួយដែលផ្ទុក F ។ តាមសំណើ 1.5 យើងបាន មួយនៃវិចទ័រ v_i ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃវិចទ័រ ផ្សេងទៀតនៃ F ។ ដោយសារតែវិចទ័រ v_i ជាធាតុនៃ G នោះមួយនៃវិចទ័រនៃ G ជាបន្សំលី នេអ៊ែរនៃវិចទ័រផ្សេងទៀតនៃ G ។ ជាវិបាក G ជាគ្រួសារភ្ជាប់។

5. យក $F=\{v_1,\cdots,v_p\}$ ជាគ្រួសារដែលផ្ទុក $\{/\}$ ។ គ្រួសារទោលសូន្យជាគ្រួសារភ្ជាប់។ ដូច្នេះតាមលក្ខណៈ 1 នៃសំណើ 1.9 យើងបាន F ជាគ្រួសារភ្ជាប់។ គ្រប់គ្រួសាររងនៃគ្រួសារ សេរីជាគ្រួសារសេរី។

1.4 អត្ថិភាពនៃគោលនៃលំហវិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់

ទ្រឹស្តីបទ 1.1. ក្នុងលំហវិចទ័រ $E\neq\{0\}$ មួយដែលមានវិមាត្រកំណត់ វាមានជានិច្ចនូវគោល។

សំរាយបញ្ជាក់

យក $G=\{v_1,\cdots,v_p\}$ ជាគ្រួសារបង្ករមួយ។ ចំពោះគ្រប់ $x\in E$ មាន $\alpha_1,\cdots,\alpha_p\in\mathbb{K}$ ដែល $x=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_pv_p$ ។
បើវិចទ័រ $v_i=\mathbf{0}$ ទាំងអស់ គេនឹងបាន $x=\mathbf{0}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in E$ ។ ដូច្នេះលទ្ធផលនេះមិនពិត ព្រោះ $E\neq\{\mathbf{0}\}$ ។ ដោយមិនប្រថុយនឹងប្តូរសន្ទស្ស យើងឧបមាថា $v_1\neq\mathbf{0}$ ។
តាមលក្ខណៈ 1 នៃសំណើ 1.9 គ្រួសារ $L_1=\{v_1\}$ សេរី។ បើវាជាគ្រួសារបង្កការ នោះទ្រឹស្តីបទនឹង ត្រូវបានបង្ហាញ។ ឧបមាថាវាមិនមែនជាគ្រួសារបង្ករ យើងនឹងបង្ហាញថាមាន $v_*\in\{v_2,\cdots,v_p\}$ ដែល $L_2=\{v_1,v_*\}$ ជាគ្រួសារសេរី។
ដោយហេតុថា ក្នុងករណី វិចទ័រនិមួយៗនៃ $\{v_2,\cdots,v_p\}$ ជាវិចទ័រភ្ជាប់ទៅនឹង v_1 មានន័យថា $\exists\lambda_2,\lambda_p$ ដែល $v_2=\lambda_2v_1,\cdots,v_p=\lambda_pv_1$ ។ ដូច្នេះ គេនឹងបាន $x\equiv\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_pv_p=\alpha_1v_1+\alpha_2\lambda_2v_1+\cdots+\alpha_p\lambda_pv_1=\alpha v_1$ ចំពោះគ្រប់ $x\in E$ ។ ដូច្នេះ $\{v_1\}$ នឹងជាគ្រួសារបង្ករ ដែលមិនពិត។ ដូច្នេះគ្រួសារ $L_2=\{v_1,v_*\}$ សេរី។ ដោយផ្លាសលប្តូរសន្ទស្ស យើងឧបមាថា $v_*=v_2$ ។
បើ L_2 ជាគ្រួសារបង្ករ នោះទ្រឹស្តីបទនឹងត្រូវបានបង្ហាញ។ ក្នុងករណីផ្ទុយ ដោយប្រើវិចារណ៍ ដដែលៗ យើងឃើញថាមាន $v_*\in\{v_3,\cdots,v_p\}$ ដែល $L_3=\{v_1,v_2,v_*\}$ ជាគ្រួសារសេរី។ ដូច្នេះ យើងសង់បានស្វ៊ីត

$$L_1\underset{\neq}{\subset}L_2\underset{\neq}{\subset}L_3\underset{\neq}{\subset}\cdots\subset G$$

នៃគ្រួសារសេរី និង ដំណើការត្រូវបានបន្តទាល់តែ L_k មិនមែនជាគ្រួសារបង្ករ។ ប៉ុន្តែ G ជាគ្រួ សារកំណត់ ជាវិបាក យើងបានដំណើការនឹងត្រូវបញ្ឈប់ចំពោះត្រង់ k ដែលយើងកំណត់ថា $L_k=G$ ។ ដូច្នេះ L_k ជាគ្រួសារសេរី និង បង្ករ។
ដោយវិភាគសំរាយបញ្ជាក់ យើងឃើញថាតាមពិតយើងបានបង្ហាញលក្ខណៈមួយខ្លាំងបន្តិច។

ទ្រឹស្តីបទ 1.2. $E\neq\{0\}$ ជាលំហវិចទ័រមួយមានវិមាត្រកំណត់។ ដូច្នេះ យើងបាន

1. ពីគ្រប់គ្រួសារបង្ករ គេអាចទាញបានគោលមួយ។

2. (ទ្រឹស្តីបទនៃគោលមិនបំពេញ) គ្រប់គ្រួសារសេរី ត្រូវអាចបំពេញដើម្បីបង្កើតគោលមួយ។

1.5 ទ្រឹស្តីបទសំខាន់អំពីវិមាត្រ

ទ្រឹស្តីបទ និង និយមន័យ 1.1. ក្នុងលំហវិចទ័រ E មួយលើកាយ $\mathbb{K}$ មានវិមាត្រកំណត់ គ្រប់គោល ទាំងអស់មានចំនួនធាតុដូចគ្នា។ ចំនួននេះហៅថាវិមាត្រនៃ E លើ $\mathbb{K}$ និងកំណត់សរសេរដោយ $\dim_{\mathbb{K}} E$ រឺ យ៉ាងខ្លី $\dim E$ ។
បើលំហវិចទ័របង្រួមទៅនឹង $\{\mathbf{0}\}$ គេសន្មត់ $\dim E = 0$ ។ ដូច្នេះ

$$E = \{\mathbf{0}\} \;\Leftrightarrow\; \dim_{\mathbb{K}} E = 0 \tag{1.31}$$

ដើម្បីបកស្រាយទ្រឹស្តីបទនេះ យើងត្រូវការបទគន្លឹះសំខាន់ខាងក្រោម។ បទគន្លឹះនេះអះអាង ថាបើគ្រួសារនៃ $n+1$ វិចទ័រ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ n វិចទ័រ នោះគ្រួសារនៃ $n+1$ វិចទ័រជាគ្រួសារភ្ជាប់។

បទគន្លឹះ 1.1. $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ ជាគ្រួសារមួយនៃលំហវិចទ័រ E និង $(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1})$ ជាគ្រួសារ ផ្សេងទៀតនៃ E ។ ឧបមាថាចំពោះគ្រប់ $1 \leq j \leq n+1$ មាន n ស្កាលែរ $\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}, \cdots, \lambda_{j,n}$ ដែល

$$f_j = \lambda_{j,1} e_1 + \lambda_{j,2} e_2 + \cdots + \lambda_{j,n} e_n \tag{1.32}$$

នោះ $(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1})$ ជាគ្រួសារភ្ជាប់។

សំរាយបញ្ជាក់
យើងនឹងបង្ហាញបទគន្លឹះនេះដោយប្រើវិចារណ៍តាមកំណើន លើ $n \geq 1$ ។

1. ជាដំបូង យើងសិក្សាករណី $n = 1$ ។ យើងស្ថិតនៅក្នុងករណីនេះ f_1 និង f_2 មិនស្មើនឹង វិចទ័រសូន្យ។ ជាវិបាក យើងបាន $e_1 \neq \mathbf{0}$ ។ ដូច្នេះ យើងបាន

$$f_1 = \lambda_1 e_1 \text{ និង } f_1 = \lambda_2 e_1$$

ជាមួយនឹង $\lambda_1 \neq 0$ និង $\lambda_2 \neq 0$ ។ ដូច្នេះ គេបាន

$$\lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2 = \mathbf{0}$$

យើងទទួលបាន (f_1, f_2) ជាគ្រួសារបង្ករ ហើយ ដូច្នេះសំណើខាងលើពិតចំពោះ $n = 1$ ។

2. ឧបមាថាសំណើខាងលើពិតចំពោះ $n \geq 1$ ។ យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n+1$ ។ ដូច្នេះ យើងអោយគ្រួសារពីរ $(e_1, e_2, \cdots, e_{n+1})$ និង E និង $(f_1, f_2, \cdots, f_{n+2})$ ដែល មានលក្ខណៈដូចក្នុងបទគន្លឹះ មានន័យថា វាផ្ទៀតផ្ទាត់

$$f_j = \lambda_{j,1} e_1 + \lambda_{j,2} e_2 + \cdots + \lambda_{j,n+1} e_{n+1},\; j = 1, 2, \cdots, n+2 \tag{1.33}$$

បើ $\lambda_{j,n+1}$ ស្មើសូន្យទាំងអស់ យើងស្ថិតនៅក្នុងស្ថានភាពខាងលើ មានន័យថា $n+2$ វិចទ័រ f_j ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃវិចទ័រ $e_1, e_2, \cdots, e_n$ ។
ដូច្នេះ $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ ជាគ្រួសារភ្ជាប់ រួច តាមលក្ខណៈ 4 នៃសំណើ 1.9 គ្រួសារ $(f_1, f_2, \cdots, f_{n+2})$ ក៏ភ្ជាប់ដែរ។

ឥឡូវនេះ ឧបមាថាមួយនៃ $\lambda_{j,n+1}$ មិនស្មើសូន្យ។ ដោយចៀសវាងសរសេរសន្ទស្សន៍គ្រួសារ $(f_1, f_2, \cdots, f_{n+2})$ ឡើងវិញ យើងសន្មត់ $\lambda_{n+2,n+1} \neq 0$ ។
ចំពោះ $1 \leq j \leq n+1$ គេយក

$$\tilde{f}_j = f_j - \frac{\lambda_{j,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} f_{n+2}$$

ដូច្នេះ វ៉ិចទ័រទាំងអស់នៃគ្រួសារ $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \cdots, \tilde{f}_{n+1})$ សុទ្ធតែជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃគ្រួសារ $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ ។ តាមសម្មតិកម្មកំណើន $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \cdots, \tilde{f}_{n+1})$ ជាគ្រួសារភ្ជាប់។ ដូច្នេះ វាមានទំនាក់ទំនងនៃភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរទំរង់

$$\tilde{\lambda}_1 \tilde{f}_1 + \tilde{\lambda}_2 \tilde{f}_2 + \cdots + \tilde{\lambda}_{n+1} \tilde{f}_{n+1} = \mathbf{0}$$

យើងទាញបានទំនាក់ទំនងនៃភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃគ្រួសារ $(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1}, f_{n+2})$

$$\tilde{\lambda}_1 f_1 + \tilde{\lambda}_2 f_2 + \cdots + \tilde{\lambda}_{n+1} f_{n+1} - \left(\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_j \frac{\lambda_{j,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} f_{n+2} \right) = \mathbf{0}$$

$(f_1, f_2, \cdots, f_{n+2})$ ជាគ្រួសារភ្ជាប់។

ដូច្នេះ បទគន្លឹះត្រូវបានបកស្រាយ។
ឥឡូវនេះ យើងស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 1.1 ។
យក $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ និង $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ ជាគ្រួសារពីរនៃ E ។ យើងបង្ហាញថា $n = m$ ។ យើងឧបមាថា $n \neq m$ ដូចជាឧទាហរណ៍ $n < m$ ។ វ៉ិចទ័រ f_j និមួយៗ ជាមួយនឹង $1 \leq j \leq n+1 \leq m$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃគ្រួសារ $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ ។ តាមបទគន្លឹះ 1.1 គ្រួសារ $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ ជាគ្រួសារភ្ជាប់។ លទ្ធផលនេះផ្ទុយពីអ្វីដែលថា វាជាគ្រួសារសេរី។ ដូច្នេះ យើងបាន $n \geq m$ ។
ករណី $n > m$ ត្រូវបានបកស្រាយដូចគ្នា ហើយយើងទាញបាន $n \leq m$ ។
សរុប យើងទទួលបាន $n = m$ ។

វិបាក 1.1. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រមួយលើកាយ $\mathbb{K}$ មានវិមាត្រកំណត់ n។

1. គ្រប់គ្រួសារដែលមានលើសពីរ n ធាតុនៃ E ជាគ្រួសារភ្ជាប់។
2. គ្រប់គ្រួសារដែលមានតិចជាង n ធាតុនៃ E អាចបង្គរ។

ឧទាហរណ៍ 1.24. លំហវ៉ិចទ័រ $\mathbb{K}^n$ ក្នុងឧទាហរណ៍ 1.3 មានវិមាត្រ n ហើយគេសរសេរ

$$\dim \mathbb{K}^n = n \tag{1.34}$$

ឧទាហរណ៍ 1.25. លំហវ៉ិចទ័រ $\mathbb{R}_n[x]$ ក្នុងឧទាហរណ៍ 1.4 មានវិមាត្រ n ហើយគេសរសេរ

$$\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1 \tag{1.35}$$

ឧទាហរណ៍ 1.26. លំហវ៉ិចទ័រ $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ នៃម៉ាទ្រីសការេទំហំ $n \times p$ ក្នុងឧទាហរណ៍ 1.7 មានវិមាត្រ np ហើយគេសរសេរ

$$\dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) = np \tag{1.36}$$

ជាពិសេស លំហវ៉ិចទ័រ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ នៃម៉ាទ្រីសការេទំហំ n មានវិមាត្រ n^2 *i.e.*

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2 \tag{1.37}$$

ឧទាហរណ៍ 1.27. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - y = 0\}$ ជាលំហវិុចទ័ររងនៃ $\mathbb{R}^2$ ។ កំណត់វិមាត្រនៃ F ។

យក $v = (x,y) \in F$ យើងបាន $y = x$ ។ ដូច្នេះ $v = x(1,1)$ ។
យើងយក $v_1 = (1,1)$ យើងបាន គ្រួសារទោល $\{v_1\}$ ជាគ្រួសារបង្កករ និង សេរីនៃ F ហើយ ដូច្នេះ $\dim F = 1$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.28. លំហវិុចទ័ររង $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + 3z = 0\}$ នៃ $\mathbb{R}^3$ ក្នុង ទាហរណ៍ 1.12 មានវិមាត្រពីរ។

ចំណាំ 1.4. វិមាត្រនៃលំហវិុចទ័រ E អាស្រ័យមិនត្រឹមតែ E ទេ ប៉ុន្តែថែមទាំងកាយ $\mathbb{K}$ ។ ហេតុដូច្នេះហើយបានគេកំណត់សរសេរ $\dim_{\mathbb{K}} E$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.29. សំណុំ $\mathbb{C}$ ប្រដាប់ដោយទំរង់វិុចទ័រលើ $\mathbb{R}$

$$(a + bi) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$
$$\lambda(a + ib) = \lambda a + i\lambda b \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

ដូច្នេះគ្រប់ $z \in \mathbb{C}$ គេអាចសរសេរបានតែមួយបែបគត់ $z = a1 + bi$ ជាមួយនឹង $a, b \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ គ្រួសារ $\{1, i\}$ ជាគោល និង $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ ។
ប៉ុន្តែ សំណុំ $\mathbb{C}$ ក៏មានទំរង់នៃលំហវិុចទ័រលើកាយ $\mathbb{C}$ ខ្លួនវាដែរ និង តាមឧទាហរណ៍ 1.24 យើងបាន $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ ។

សំណើ 1.10. $E_1, \cdots, E_p$ ជាលំហវិុចទ័រមានវិមាត្រកំណត់លើកាយ $\mathbb{K}$ ដូចគ្នា។ ដូច្នេះ

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_1 \times E_1 \cdots \times E_p) = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2 + \cdots + \dim_{\mathbb{K}} E_p \tag{1.38}$$

សំរាយបញ្ជាក់
យក $\{a_1, \cdots, a_{n_1}\}, \{b_1, \cdots, b_{n_2}\}, \cdots, \{l_1, \cdots, l_{n_p}\}$ ជាគោលនៃ $E_1, E_2, \cdots, E_p$ ។ ដូច្នេះ យើងបានដោយងាយ

$$\{(a_i, 0, \cdots, 0)_{i=1\cdots n_1}, (0, b_i, 0 \cdots 0)_{i=1\cdots n_2}, \cdots, (0, \cdots, 0.l_i)_{i=1\cdots n_p}\}$$

ជាគោលនៃ $E_1 \times \cdots \times E_p$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.30. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$ និង $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$ ។

ជាទូទៅ ដើម្បីបង្ហាញថាគ្រួសារមួយជាគោល យើងត្រូវបង្ហាញថាវាជាគ្រួសារបង្ករនិងសេរី។ ប៉ុន្តែបើគ្រួសារដែលមានចំនួនធាតុដូចវិមាត្រនៃលំហ យើងមានទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមដែលការប្រើ ប្រាស់របស់វាមានជាញឹកញាប់។

ទ្រឹស្តីបទ 1.3. E ជាលំហមានវិមាត្រកំណត់ n ។ យើងបាន

1. គ្រប់គ្រួសារបង្ករដែលមាន n ធាតុ ជាគោលមួយ។
2. គ្រប់គ្រួសារសេរីដែលមាន n ធាតុ ជាគោលមួយ។

សំរាយបញ្ជាក់

1. យក $\mathcal{G}$ ជាគ្រួសារបង្ករមួយ ដែលមាន n ។ តាមលក្ខណៈ 1 នៃទ្រឹស្តីបទ 1.2 គេទាញ បានបានគោល មួយនៃ E ។ ប៉ុន្តែគោលនេះត្រូវតែមានត្រូវតែមាន n ធាតុ ព្រោះ $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ ។ ដូច្នេះ វាជា $\mathcal{G}$ ខ្លួនវា។
2. យក $\mathcal{L}$ ជាគ្រួសារសេរីមួយ ដែលមាន n ។ តាមលក្ខណៈ 2 នៃទ្រឹស្តីបទ 1.2 នៃគោលមិនពេញ គេបន្ថែមវិុចទ័រដើម្បីបានគោលមួយនៃ E ដែលមានលើសពី n ធាតុដែលក្ខណៈនេះមិនពិត។ ដូច្នេះ $\mathcal{L}$ ខ្លួនវាជាគោលនៃ E ។

ទ្រឹស្តីបទ 1.4. E ជាលំហវិុចទ័រមានវិមាត្រកំណត់ និង F ជាលំហវិុចទ័ររងនៃ E ។ យើងបាន

1. $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$ ។
2. $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E$ លុះត្រាតែ $E = F$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

1. បើ $\dim_{\mathbb{K}} F = 0$ យើងពិតជាបាន $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$ ។
ឧបមាថា $\dim_{\mathbb{K}} F \neq 0$ ។ យើងបាន $F \neq \{0\}$ និង F មានគោល $\mathcal{B}$ មួយ។ ដោយសារតែ គោល $\mathcal{B}$ ជាផ្នែកសេរីនៃ F ហើយ ដូច្នេះវាជាផ្នែកសេរីនៃ E ។ ពីលក្ខណៈ 1 នៃវិបាក 1.1 យើងបាន $Card\,\mathcal{B} \leq n$ ដែល n ជាវិមាត្រនៃ E មានន័យថា $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$ ។
2. បើ $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E$ នោះមានគោល $\mathcal{B}$ នៃ F ដែលមាន n ធាតុ $(n = \dim_{\mathbb{K}} E)$ ។ ប៉ុន្តែ $F \subset E$ នោះ $\mathcal{B}$ ជាគ្រួសារសេរីនៃ E ដែលមាន n ធាតុ។ តាមទ្រឹស្តីបទ 1.3 គ្រួសារ $\mathcal{B}$ ជាគោលមួយ និង ដូច្នេះ វាបង្ករបាន E *i.e.* $[\mathcal{B}] = E$ ។ ប៉ុន្តែ $[\mathcal{B}] = F$ ដូច្នេះយើងបាន $F = E$ ។

ចំណាំ 1.5. លក្ខណៈ 2 នៃទ្រឹស្តីបទ 1.4 ខាងលើត្រូវបានប្រើជាញឹកញាប់សំរាប់បង្ហាញថា លំហ វិុចទ័រពីរ E និង F ស្មើគ្នា។ ដោយសារតែ ដើម្បីបង្ហាថា $E = F$ យើងត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់ជាគោល ការណ៍ថា $F \subset E$ និង $E \subset F$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ យើងចាំបាច់ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $F \subset E$ និង $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E$ ដែលមានលក្ខណៈងាយស្រួលជាងជាទូទៅ។

1.6 គោលនៃលំហវិុទ័រមានវិមាត្រមិនកំណត់

និយមន័យ 1.7. E ជាលំហវិុចទ័រមួយ និង $\mathcal{F} = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ជាគ្រួសារមួយដែលមិនចាំបាច់ជា គ្រួសារកំណត់។ គេហៅថាបន្សំលីនេអ៊ែរកំណត់ (រឺយ៉ាងងាយ បន្សំលីនេអ៊ែរ) នៃគ្រួសារ ជា កន្សោមទំរង់៖

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \text{ ដែល } I \text{ ជាគ្រួសាររងកំណត់មួយនៃ } A$$

គេហៅថាលំហវិុចទ័ររងរូបង្ករដោយ $\mathcal{F}$ ជាលំហវិុចទ័ររងនៃ E កំណត់សរសេរដោយ $[\mathcal{F}]$ ត្រូវបានបង្កើតឡើងដោយគ្រប់បន្សំលីនេអ៊ែរកំណត់នៃធាតុនៃ $\mathcal{F}$ ។

សំណើ 1.11. $[\mathcal{F}]$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងដែលតូចជាងគេបំផុតនៃ E ដែលផ្ទុក $\mathcal{F}$ ។ ជាពិសេស F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E គេបាន $[F] = F$ ។

សំរាយបញ្ជាក់
បើ G ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E ដែលផ្ទុក $\mathcal{F}$ នោះ ដោយផ្អែកលើភាពស្ថាប G ត្រូវផ្ទុកគ្រប់បន្សំលី នេអ៊ែរកំណត់ទាំងអស់នៃធាតុនៃ $\mathcal{F}$ មានន័យថា G ផ្ទុក $[\mathcal{F}]$ ។

និយមន័យ 1.8. E លំហវ៉ិចទ័រមួយ។

1. គ្រួសារ $\mathcal{F} = \{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ មួយនៃធាតុនៃ E ហៅថាគ្រួសារបង្កករ បើ $[\mathcal{F}] = E$ មានន័យថា $\forall x \in E$ មានគ្រួសារកំណត់ $\{x_1, \cdots, x_p\} \subset \mathcal{F}$ ដែល
$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p$$

2. គ្រួសារ $\mathcal{F}$ ហៅថាសេរី បើគ្រប់គ្រួសាររងកំណត់ទាំងអស់ជាគ្រួសារសេរី មានន័យថា $\forall I \subset A$, I កំណត់ គេបាន
$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0,\ \forall i \in I$$

3. គ្រួសារ $\mathcal{F}$ មួយហៅថាគោល បើវាជាគ្រួសារ បង្ករផង និងគ្រួសារសេរីផង។

សំណើ 1.12. $\mathcal{B}$ ជាគោលមួយនៃ E លុះត្រាតែ គ្រប់ធាតុនៃ E សរសេរតែមួយបែបគត់ជាបន្សំ លីនេអ៊ែរកំណត់នៃធាតុនៃ $\mathcal{B}$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.31. គ្រួសារ $\{1, x, x^2, \cdots, x^n \cdots\}_{n\in\mathbb{N}}$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}[x]$ ។

បំណកស្រាយ
គ្រួសារនេះជាគ្រួសារបង្កករព្រោះគ្រប់ពហុធាទាំងអស់សរសេរជាបន្សំលីនេអ៊ែរកំណត់នៃ $1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ ។ ម៉្យាងវិញទៀត វាជាគ្រួសារសេរីព្រោះបើគេអោយបន្សំលីនេអ៊ែរកំណត់មួយ ស្មើសូន្យ $\lambda_0 1 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_p x^p = \mathbf{0}$ គេបាន $\lambda_0 = 0, \cdots, \lambda_p = 0$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.32. យក $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{ \begin{array}{ccc} u & : & \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ & & n \mapsto u_n \end{array} \right\}$ សំណុំនៃស្វ៊ីតចំនួនពិតជាលំហវ៉ិចទ័រចំពោះ ប្រមាណវិធីបូកធម្មជាតិ និង ប្រមាណវិធីគុណដោយចំនួនពិត។
គេយក $e_1 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots), e_2 = (0, 1, 0, \cdots), \cdots, e_n = (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{\text{តួទី } n}, 0, \cdots), \cdots$ ។ ដូច្នេះ

គ្រួសារ $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}_{n\in\mathbb{N}}$ មិនមែនជាគោលនៃ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ។

បំណកស្រាយ
ជាដំបូង គ្រួសារនេះជាគ្រួសារសេរីព្រោះ គ្រប់គ្រួសារកំណត់ $e_1, e_2, \cdots, e_n$ ដែល $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = \mathbf{0}$ គេបាន $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ ។
ផ្ទុយទៅវិញ វាមិនមែនជាគ្រួសារបង្កករ ព្រោះតាមបន្សំលីនេអ៊ែរកំណត់ គេបង្ករបានស្វ៊ីត $(u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots)$

ដែលក្នុងនោះ មានតែចំនួនកំណត់មួយនៃ u_i ដែលមិនស្មើសូន្យ មានន័យថាស្វ៊ីតសូន្យចាប់ពីសន្ទស្សន៍ណាមួយ។
ចំពោះលំហវិចទ័រមានវិមាត្រមិនកំណត់ គេអាចបង្ហាញផងដែរទ្រឹស្តីបទនៃអត្ថិភាពនៃគោល ប៉ុន្តែ សំរាយបញ្ជាក់ហួសកំរិតនៃមេរៀន។

ទ្រឹស្តីបទ 1.5. គ្រប់លំហវិចទ័រមិនបង្រួមទៅនឹង $\{0\}$ មានគោលមួយ។ និយាយអោយច្បាស់

1. ពីគ្រប់គ្រួសារ បង្ករ គេអាចទាញបានគោលមួយ។
2. គ្រប់គ្រួសារសេរីទាំងអស់ ត្រូវបានបំពេញជាគោលមួយ។

1.7 ផលបូក ផលបូកផ្ទាល់ លំហវិចទ័របន្ថែម

លក្ខណៈ និង និយមន័យ 1.1. E_1 និង E_2 ជាលំហវិចទ័ររងពីរនៃលំហវិចទ័រ E មួយ។ គេកំណត់យក៖

$$E_1 + E_2 = \{x \in E \mid \exists x_1 \in E_1, \exists x_2 \in E_2, \, x = x_1 + x_2\} \tag{1.39}$$

នោះ $E_1 + E_2$ ជាលំហវិចទ័ររងមួយនៃ E ហៅថាផលបូកនៃពីរវិចទ័ររង E_1 និង E_2 ។

ឥឡូវនេះ យើងយក $\mathcal{E} = E_1 + E_2$ ។ តាមនិយមន័យ 1.1 គ្រប់ធាតុនៃ $\mathcal{E}$ ជាផលបូកនៃធាតុមួយនៃ E_1 និង នៃធាតុមួយនៃ E_2 ។ ប៉ុន្តែ ការបំបែកនេះមិនមានតែមួយទេជាទូទៅ។ ដោយហេតុថា យើងឧបមា $E_1 \cap E_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ និង $x_0 \neq \mathbf{0}$, $x_0 \in E_1 \cap E_2$ ។
បើ $x = x_1 + x_2$ ជាមួយនឹង $x_i \in E_i$ $(i = 1, 2)$ គេក៏បាន

$$x = (x_1 + x_0) + (x_2 - x_0)$$

និង $x_1 + x_0 \in E_1$, $x_2 - x_0 \in E_2$ ។
ដូច្នេះ យើងឃើញថា លក្ខខ័ណ្ឌចាំបាច់ដើម្បីអោយការបំបែកនេះមានតែមួយគត់គឺ $E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\}$ ។
លក្ខខ័ណ្ឌនេះក៏គ្រប់គ្រាន់ដែរ។ ដោយហេតុថា ឧបមាថា $E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\}$ និង យក $x = x_1 + x_2$, $x = x_1' + x_2'$ ជាការបំបែកពីរនៃ x លើ E_1 និង E_2 តាមផលដក គេបាន៖

$$x_1 - x_1' = x_2' - x_2$$

យក $y = x_1 - x_1'$ យើងបាន $y \in E_1$ និង $y = x_2' - x_2 \in E_2$ ។ ដូច្នេះ $y \in E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\}$ មានន័យថា $y = \mathbf{0}$ ។ យើងទទួលបាន $x_1 = x_1'$ និង $x_2 = x_2'$ ។
ដូច្នេះ យើងបានបង្ហាញសំណើខាងក្រោម៖

សំណើ 1.13. E_1 និង E_2 ជាលំហវិចទ័ររងពីរនៃលំហវិចទ័រ E មួយ និង $\mathcal{E} = E_1 + E_2$ ។ ការបំបែកនៃគ្រប់ធាតុនៃ $\mathcal{E}$ ជាផលបូកនៃធាតុមួយនៃ E_1 និង នៃធាតុមួយនៃ E_2 មានតែមួយគត់ លុះត្រាតែ $E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\}$ ។

$$\mathcal{E} = E_1 \oplus E_2 \tag{1.40}$$

និង គេថា $\mathcal{E}$ ជាផលបូកផ្ទាល់នៃ E_1 និង E_2 ។
និយាយអោយច្បាស់

$$\mathcal{E} = E_1 \oplus E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{E} = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\} \end{cases} \tag{1.41}$$

$$\mathcal{E} = E_1 \oplus E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{E},\, \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\, x = x_1 + x_2 \tag{1.42}$$

និយមន័យ 1.9. E_1 និង E_2 ជាលំហវ៉ិចទ័ររងពីរនៃលំហវ៉ិចទ័រ E មួយ ។ គេថា E_1 និង E_2 ជាលំហបន្ថែមគ្នា (រឺ E_2 ជាបំពេញនៃ E_1) បើ $E = E_1 \oplus E_2$ ។

សំណើ 1.14. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយ។ គេបាន $E = E_1 \oplus E_2$ លុះត្រាតែ ចំពោះគ្រប់គោល $\mathcal{B}_1$ នៃ E_1 និង គ្រប់គោល $\mathcal{B}_2$ នៃ E_2 នោះ $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ ជាគោលមួយនៃ E ។

សំរាយបញ្ជាក់

យក $\mathcal{B}_1 = \{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ និង $\mathcal{B}_2 = \{w_\beta\}_{\beta\in\beta}$ ជាគោលនៃ E_1 និង E_2 រៀងគ្នា ហើយឧបមាថា $\{v_\alpha, w_\beta\}_{(\alpha\beta)\in A\times B}$ ជាគោលមួយនៃ E ។ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ $x \in E$ ត្រូវបានសរសេរតែមួយ បែបគត់

$$x = \lambda_1 v_{\alpha_1} + \cdot + \lambda_p v_{\alpha_p} + \mu_1 w_{\beta_1} + \cdots + \mu_q w_{\beta_q}$$

ដោយសារតែ $\mathcal{B}_1$ និង $\mathcal{B}_1$ ជាគោលនៃ E_1 និង E_2 រៀងគ្នា នោះមានតែមួយគត់ គូ $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ ដែល

$$x_1 = \lambda_1 v_{\alpha_1} + \cdot + \lambda_p v_{\alpha_p} \text{ និង } + x_2 = \mu_1 w_{\beta_1} + \cdots + \mu_q w_{\beta_q}$$

យើងឃើញថា ចំពោះគ្រប់ $x \in E$ មានគូ $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ តែមួយគត់ដែល $x = x_1 + x_2$ ។ ដូច្នេះ $E = E_1 \oplus E_2$ ។
ច្រាសមកវិញ បើ $E = E_1 \oplus E_2$ នោះ គ្រប់ធាតុ $x \in E$ បំបែកបានតែមួយបែបគត់លើ E_1 និង E_2 និង វិបាក វាបំបែកបានតែមួយបែបគត់លើ $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ ។ ដូច្នេះ $\mathcal{B}$ ជាគោលមួយនៃ E ។

វិបាក 1.2. E ជាលំហវ៉ិចទ័រ។ ចំពោះគ្រប់លំហវ៉ិចទ័ររង E_1 នៃ E ជានិច្ចកាល មានលំហបន្ថែមមួយ។ លំហបន្ថែមនៃ E_1 មិនមានតែមួយទេ ប៉ុន្តែបើ E មានវិមាត្រកំណត់ នោះគ្រប់លំហបន្ថែមនៃ E_1 មានវិមាត្រដូចគ្នា។

សំរាយបញ្ជាក់

ដើម្បីអោយមានភាពងាយស្រួល យើងនឹងអោយសំរាយបញ្ជាក់ក្នុងករណីលំហមានវិមាត្រកំណត់។ ក្នុងលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រមិនកំណត់ កំណត់សរសេរមានសភាពស្មុគ្រស្មាញ។
យក $\{v_1, \cdots, v_p\}$ ជាគោលមួយនៃ E_1 និង $n = \dim E$ ។ តាមលក្ខណៈ 2 ទ្រឹស្តីបទ 1.2 មានវ៉ិចទ័រ $w_{p+1}, \cdots, w_n$ ដែល $\{v_1, \cdots, v_p, w_{p+1}, \cdots, w_n\}$ ជាគោលមួយនៃ E ។ ដោយយក $E_2 = [w_{p+1}, \cdots, w_n]$ នោះ តាមលក្ខណៈ 1 ទ្រឹស្តីបទ 1.2 ដែដែល E_2 មានគោលមួយ $\mathcal{B}_2$ ហើយ $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ ជាគោលមួយនៃ E ។ ដូច្នេះ មានលំហបន្ថែមមួយនៃ E_1 ក្នុង E ។
ដោយសារតែ ការជ្រើសរើស $w_{p+1}, \cdots, w_n$ មិនមានតែមួយគត់ នោះ លំហបន្ថែមនៃ E_1 ក៏មិន មានតែ មួយដែរ។ ប៉ុន្តែគ្រប់លំហបន្ថែមនៃ E_1 មានវិមាត្រស្មើនេង $n - p$ ដែល p ជាវិមាត្រនៃ E_1 ។

ទ្រឹស្តីបទ 1.6. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់។ យើងបាន

$$E = E_1 \oplus E_2 \quad \Leftrightarrow \quad E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\} \text{ និង } \dim E = \dim E_1 + \dim E_2 \tag{1.43}$$

សំរាយបញ្ជាក់
ឧបមាថាលក្ខខ័ណ្ឌចាំបាច់ផ្ទៀងផ្ទាត់។ ព្រោះ បើយើងមាន $E = E_1 \oplus E_2$ នោះតាមសំណើ 1.13 និង វិបាក 1.2 យើងទទួលបាន $E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\}$ និង $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$ ។
ឥឡូវនេះ យើងបង្ហាញលក្ខខ័ណ្ឌគ្រប់គ្រាន់។ យក $\{v_1, \cdots, v_p\}$ ជាគោលមួយនៃ E_1 និង $\{w_{p+1}, \cdots, w_n\}$ ជាគោលមួយនៃ E_2 ហើយ n ជាវិមាត្រនៃ E ។ ឧបមាថា

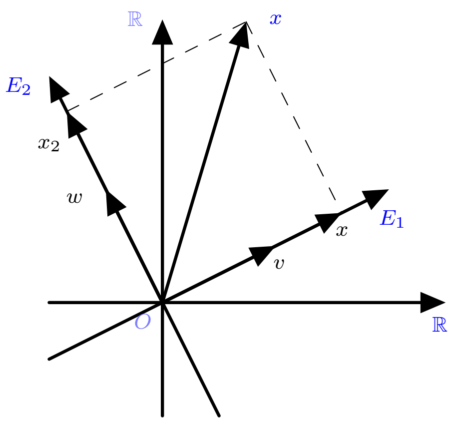
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p + \mu_{p+1} w_{p+1} + \cdots + \mu_n w_n = \mathbf{0}$$

យើងបាន

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = -(\mu_{p+1} w_{p+1} + \cdots + \mu_n w_n)$$

យក $y = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$ យើងបាន $y \in E_1$ ។ យើងឃើញថា $y = -(\mu_{p+1} w_{p+1} + \cdots + \mu_n w_n)$ រួច $y \in E_2$ ។ សរុប $y \in E_1 \cap E_2$ ។
ដោយ $y \in E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\}$ នោះ $y = \mathbf{0}$ ហើយ ដូច្នេះ $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = \mathbf{0}$ ។ ដោយសារតែ $\{v_1, \cdots, v_p\}$ ជាគ្រួសារសេរី យើងទាញបាន $\lambda_1 = 0, \cdots, \lambda_p = 0$ ។
ដូចគ្នាដែរ យើងបាន $\mu_{p+1} w_{p+1} + \cdots + \mu_n w_n = \mathbf{0}$ រួច $\mu_{p+1} = 0, \cdots, \mu_n = 0$ ។
ជាចុងក្រោយ គ្រួសារ $\{v_1, \cdots, v_p, w_{p+1} + \cdots + w_n\}$ សេរីនៃ E ។ ដោយសារតែ $\dim E = n$ នោះវាជាគោលមួយនៃ E ។ តាមទ្រឹស្តីបទ 1.3 យើងបាន $E = E_1 \oplus E_2$ ។

ឧទាហរណ៍ 1.33. ក្នុង $\mathbb{R}^2$ គេអោយពីរវិុចទ័រ v និង w មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា។ គេយក $E_1 = [v]$ និង $E_2 = [w]$ ។ យើងបាន $\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2$ ព្រោះ $\{v, w\}$ បង្កើតបានគោលមួយ។ យើងឃើញថានៅក្នុងរូប គ្រប់វិុចទ័រ $x \in \mathbb{R}^2$ បំបែកតែមួយបែបគត់លើ E_1និង E_2 ។

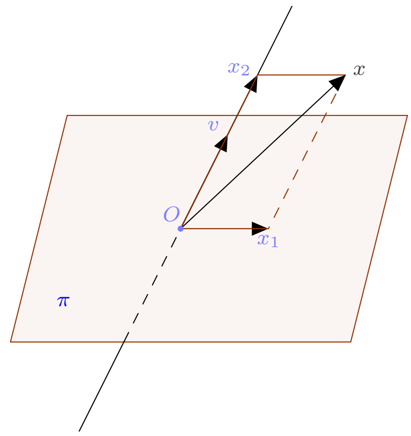


រូប 1.7:

ឧទាហរណ៍ 1.34. ក្នុង $\mathbb{R}^3$ គេអោយ π ជាប្លង់វិុចទ័រ និង v ជាវិុចទ័រមួយមិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់នេះ។ គេបាន

$$\mathbb{R}^3 = \pi \oplus [v]$$

ព្រោះ បើ $\{e_1, e_2\}$ ជាគោលមួយនៃ π នោះ $\{e_1, e_2, v\}$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}^3$ ។



រូប 1.8:

ឧទាហរណ៍ 1.35. គេយក $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ និង $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ និង $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ ។
យើងឃើញថា E_1 និង E_2 ជាលំហវ៉ិចទ័ររងពីរនៃ E ហើយ $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ ។ លើសពីនេះ គ្រប់ម៉ាទ្រីសនៃ E ជាផលបូកនៃម៉ាទ្រីសនៃ E_1 និង E_2 *i.e.* $E = E_1 + E_2$ ។ ដូច្នេះ $E = E_1 \oplus E_2$ ។

សំណើ 1.15. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយមានវិមាត្រកំណត់ ហើយ E_1 និង E_2 ជាលំហវ៉ិចទ័ររងពីរនៃ E ។ គេបាន

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2) \quad (1.44)$$

ជាពិសេស

$$\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 \quad (1.45)$$

សំរាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា $\dim E_1 = p$, $\dim E_2 = q$ និង $\dim E_1 \cap E_2 = r$ ។ ដោយសារតែ $E_1 \cap E_2$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E_1 និងនៃ E_2 គេបាន $r \leq p$ និង $r \leq q$ ។ គេអោយគោល $\{a_1 \cdots, a_r\}$ មួយនៃ $E_1 \cap E_2$ ។ ដោយសារតែ $\{a_1, \cdots, a_r\}$ ជាគ្រួសារសេរី នោះគេអាចបំពេញដើម្បីបានគោលមួយនៃ E_1 និង ដូចគ្នាដែរ គេអាចបំពេញដើម្បីបានគោលមួយនៃ E_2 ។ ដូច្នេះ គេអាចសង់

គោលមួយនៃ E_1 មានទំរង់៖ $\{a_1, \cdots, a_r, e_{r+1}, \cdots, e_p\}$

គោលមួយនៃ E_2 មានទំរង់៖ $\{a_1, \cdots, a_r, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_q\}$

គ្រប់វ៉ិចទ័រនៃ $E_1 + E_2$ សរសេរជាផលបូកនៃវ៉ិចទ័រមួយនៃ E_1 និងវ៉ិចទ័រមួយនៃ E_2 ។ ដូច្នេះវាមានទំរង់៖

$$x = (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \lambda_{r+1} e_{r+1} + \cdots + \lambda_p e_p) + (\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_r a_r + \mu_{r+1} \varepsilon_{r+1} + \cdots + \mu_q \varepsilon_q)$$

ដូច្នេះ ដោយយក $\nu_i = \lambda_i + \mu_i$ ចំពោះ $i = 1, \cdots, r$ គេបាន

$$x = (\nu_1 a_1 + \cdots + \nu_r a_r) + (\lambda_{r+1} e_{r+1} + \cdots + \lambda_p e_p) + (\mu_{r+1} \varepsilon_{r+1} + \cdots + \mu_q \varepsilon_q)$$

ជាវិបាក $\{a_1, \cdots, a_r, e_{r+1}, \cdots, e_p, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_q\}$ ជាគ្រួសារបង្កើននៃ $E_1 + E_2$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថាវាជាគ្រួសារសេរី។
គេអោយបន្សំលីនេអ៊ែរសូន្យមួយ៖

$$\underbrace{\nu_1 a_1 + \cdots + \nu_r a_r}_{x \in E_1 \cap E_2} + \underbrace{\lambda_{r+1} e_{r+1} + \cdots + \lambda_p e_p}_{y \in E_1} + \underbrace{\mu_{r+1} \varepsilon_{r+1} + \cdots + \mu_q \varepsilon_q}_{z \in E_2} = \mathbf{0} \tag{1.46}$$

ដោយយក $x = \nu_1 a_1 + \cdots + \nu_r a_r$, $y = \lambda_{r+1} e_{r+1} + \cdots + \lambda_p e_p$ និង $z = \mu_{r+1} \varepsilon_{r+1} + \cdots + \mu_q \varepsilon_q$ គេបាន $x + y + z = \mathbf{0}$ *i.e.* $z = -(x + y)$ ។ ដោយសារតែ $z \in E_2$ និង $x + y \in E_1$ *i.e.* $z \in E_1$ ដូច្នេះ $z \in E_1 \cap E_2$ ។
ជាវិបាក z អាចសរសេរជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ *i.e.*

$$\mu_{r+1} \varepsilon_{r+1} + \cdots + \mu_q \varepsilon_q = \rho_1 a_1 + \cdots + \rho_r a_r$$

ប៉ុន្តែ $\{a_1, \cdots, a_r, \varepsilon_{r+1} + \cdots + \varepsilon_q\}$ ជាគោលមួយ។ ដូច្នេះ មេគុណទាំងអស់នៃបន្សំលីនេអ៊ែរនេះស្មើសូន្យ។ ជាពិសេស $\mu_{r+1} = 0, \cdots, \mu_q = 0$ ។
ដូចគ្នាដែរ គេបាន $\lambda_{r+1} = 0, \cdots, \lambda_p = 0$ ។
ដូច្នេះ ពីទំនាក់ទំនង 1.46 គេទាញបាន $\nu_1 a_1 + \cdots + \nu_r a_r = \mathbf{0}$ ។ ត្បិត $\{a_1, \cdots, a_r\}$ ជាគោលមួយ ដូច្នេះ $\nu_1 = 0, \cdots, \nu_r = 0$ ។
ដូច្នេះ គ្រួសារ $\{a_1, \cdots, a_r, e_{r+1}, \cdots, e_p, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_q\}$ ជាគោលមួយនៃ $E_1 + E_2$ ។ យើងទាញបាន៖

$$\dim(E_1 + E_2) = r + (p - r) + (q - r) = p + q - r = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

1.8 ផលបូក ផលបូកផ្ទាល់នៃលំហវ៉ិចទ័ររងច្រើន

លក្ខណៈ និង និយមន័យ 1.2. $E_1, \cdots, E_p$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃលំហវ៉ិចទ័រ E តែមួយ។ គេកំណត់

$$E_1 + \cdots + E_p = \{x \in E | \exists x_1 \in E_1, \cdots, \exists x_p \in E_p,\ x = x_1 + \cdots + x_p\}$$

នោះ $E_1 + \cdots + E_p$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃ E ហៅថាផលបូកនៃលំហវ៉ិចទ័រ $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ ។

សំណើ 1.16. បើ $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ ជាគ្រួសារ បង្ករៀងគ្នានៃ $E_1 \cdots, E_p$, នោះ $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ ជាគ្រួសារបង្កមួយនៃ $E_1 + \cdots + E_p$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

យក $x = x_1 + \cdots + x_p$ ជាធាតុមួយនៃ $E_1 + \cdots + E_p$, ជាមួយនឹង $x_i \in E_i$ ចំពោះ $i = 1, 2 \cdots, p$ ។ យើងឃើញថាចំពោះ i និមួយៗ x_i ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃធាតុនៃគ្រួសារ $\mathcal{B}_p$ ។ ដូច្នេះ x ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃគ្រួសារ $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ ។
តាមនិយមន័យ គ្រប់ធាតុ $x \in E_1 + \cdots + E_p$ បំបែកលើ E_i ប៉ុន្តែជាទូទៅការបំបែកមិនមានតែមួយទេ។ ដូចជាឧទាហរណ៍ បើ $E_1 \cap E_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ និង $x = x_1 + \cdots + x_p$ ជាមួយនឹង $x_i \in E_i$ ចំពោះ $i = 1, 2 \cdots, p$ គេក៏អាចសរសេរ៖

$$x = (x_1 - x_0) + (x_2 + x_0) + \cdots + x_p$$

ដោយយក $x_0 \neq \mathbf{0}$ និង $x_0 \in E_1 \cap E_2$ ។
ដូច្នេះ គេនឹងបានការបំបែកពីររបៀបផ្សេងគ្នានៃ x ។

និយមន័យ 1.10. $E_1,\cdots,E_p$ ជាលំហវិចទ័ររងនៃ E ។ គេថាវាជាផលបូកផ្ទាល់ បើគ្រប់វិចទ័រនៃ $\mathcal{E}=E_1+\cdots+E_p$ បំបែកបានតែមួយរបៀបគត់ជាផលបូកនៃ E_1 នៃ $E_2,\cdots,$ នៃ E_p ។
គេសរសេរ $\mathcal{E}=E_1\oplus\cdots\oplus E_p$ និងគេថា $\mathcal{E}$ ជាផលបូកផ្ទាលើនៃ E_i ។

ទ្រឹស្តីបទ 1.7. $E_1,\cdots,E_p$ ជាលំហវិចទ័ររងនៃ E ។ ដូច្នេះ $E_1,\cdots,E_p$ ជាផលបូកផ្ទាល់លុះត្រាតែ ចំពោះគ្រប់គោល $\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_p$ រៀងគ្នានៃ $E_1,\cdots,E_p$ គ្រួសារ $\{\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_p\}$ ជាគ្រួសារសេរី។
រីម្យាងវិញទៀត តាមទ្រឹស្តីបទ 1.16 $\mathcal{E}=E_1\oplus\cdots\oplus E_p$ លុះត្រាតែ ចំពោះគ្រប់គោលរៀងគ្នា $\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_p$ នៃ $E_1,\cdots,E_p$ គ្រួសារ $\{\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_p\}$ ជាគោលនៃ $\mathcal{E}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់
ដើម្បីសំរួល យើងបកស្រាយនៅពេលនេះក្នុងលំហវិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់។ លំហវិចទ័រមានវិមាត្រមិនកំណត់នឹងត្រូវបកស្រាយដូចគ្នា។ មានតែកំណត់សរសេរទេមានលក្ខណៈស៊ីជំរៅបន្តិច។
យក $\mathcal{B}_1=\{v_1,\cdots,v_r\},\cdots,\mathcal{B}_p=\{w_1,\cdots,w_s\}$ ជាគោលនៃ $E_1,\cdots,E_p$ រៀងគ្នា និងឧបមាថា $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_p\}$ ជាគ្រួសារសេរី។ ដោយសារតែវាជាគ្រួសារបង្ករនៃ $\mathcal{E}=E_1+\cdots+E_p$ នោះគ្រប់ $x\in\mathcal{E}$ សរសេរបានតែមួយបែបគត់៖

$$x=\underbrace{\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_rv_r}_{E_1}+\cdots+\underbrace{\mu_1w_1+\cdots+\mu_sw_s}_{E_p}$$

ស្កាលែរ λ_i និង μ_i ទាំងអស់មានតែមួយគត់។ ដូច្នេះ x បំបែកបានតែមួយបែបគត់លើ $(E_i)_{1\le i\le p}$ មានន័យថា $(E_i)_{1\le i\le p}$ ជាផលបូកផ្ទាល់។
ច្រាសមកវិញ ឧបមាថា $(E_i)_{1\le i\le p}$ ជាផលបូកផ្ទាល់។ យើងនឹងបង្ហាញថា $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_p\}$ ជាគ្រួសារសេរី។ យើងមានបន្សំលីនេអ៊ែរសូន្យមួយ៖

1. $\underbrace{\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_rv_r}_{E_1}+\cdots+\underbrace{\mu_1w_1+\cdots+\mu_sw_s}_{E_p}=\mathbf{0}$ យើងសង្កេតឃើញថា

2. $\mathbf{0}=\mathbf{0}_{E_1}+\cdots+\mathbf{0}_{E_p}$ ដែល $\mathbf{0}_{E_i}$ ជាធាតុអព្យាក្រិតនៃ E_i និងមិនផ្សេងពី $\mathbf{0}$ ។

តាម 1 និង 2 យើងបានការបំបែកនៃ $\mathbf{0}$ លើ $E_1,\cdots,E_p$ បានពីររបៀប។ ដោយសារតែការបំបែកមានតែមួយគត់ យើងបាន

$$\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_rv_r=\mathbf{0}_{E_1},\cdots,\mu_1w_1+\cdots+\mu_sw_s=\mathbf{0}_{E_s}$$

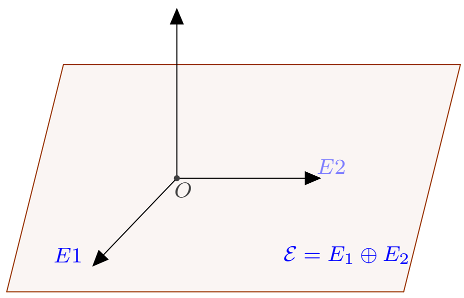
ត្បិតគ្រួសារ $\mathcal{B}_1,\cdots,\mathcal{B}_p$ សេរី ជាវិបាក យើងបាន៖

$$\lambda_1=0,\cdots,\lambda_r=0,\cdots,\mu_1=0,\cdots,\mu_s=0$$

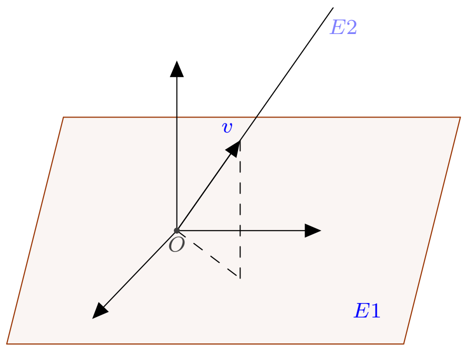
ចំណាំ 1.6. យើងកត់សំគាលើឃើញថា $\mathcal{E}=E_1\oplus\cdots\oplus E_p$ ជាលំហវិចទ័ររងនៃ E និង អាចផ្សេងពី E ដូចបង្ហាញនៅក្នុងឧទាហរណ៍ខាងក្រោមជាមួយនឹង $E=\mathbb{R}^3$ ៖

1. ក្នុងរូប $E_1=[\vec{i}]$ ជាអ័ក្ស Ox និង $E_2=[\vec{j}]$ ជាអ័ក្ស Oy ។ គេយក $\mathcal{E}=E_1\oplus E_2$ ជាប្លង់ Oxy គេបាន $\mathcal{E}\underset{\neq}{\subset}E$ ។

2. ក្នុងរូប $E_1 = [\vec{i}, \vec{j}]$ ជាប្លង់ Oxy និង $E_2 = [\vec{v}]$ ($v \notin E_1$) ជាអ័ក្ស Oy ។ គេយក $\mathcal{E} = E_1 \oplus E_2$ គេបាន $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3 = E$ ។



រូប 1.9:



រូប 1.10:

ដូច្នេះ យើងត្រូវបែងចែកអោយបានច្បាស់សញ្ញាណ វ៉ិចទ័រ E_i ជាផលបូកផ្ទាល់ (មើលរូប) និង E ជាផលបូកផ្ទាលើនៃ E_i (មើលរូប) ។

វិបាក 1.3. បើ E ជាលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រកំនត់។ នោះ

$$\dim(E_1 \oplus \cdots \oplus E_p) = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$$

វិបាក 1.4. បើ E ជាលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រកំនត់។ $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ លុះត្រាតែ

1. $E = E_1 + \cdots + E_p$
2. $\dim E = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$

សំរាយបញ្ជាក់
ជាការពិតណាស់ គេបានល័ក្ខខ័ណ្ឌចាំបាច់ ដោយផ្អែកលើនិយមន័យ 1.10 និង វិបាក 1.3 ។ ច្រាសមកវិញ ឧបមាថាល័ក្ខខ័ណ្ឌចាំបាចើផ្ទៀងផ្ទាត់។ យក $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ ជាគោលរៀងគ្នានៃ $E_1, \cdots, E_p$ ។ ដូច្នេះ តាមល័ក្ខខ័ណ្ឌ 1 នៃវិបាក 1.4 និង សំណើ 1.16 $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p\}$ គ្រួសារបង្កករ។ ម៉្យាងវិញទៀត ល័ក្ខខ័ណ្ឌ 2 នៃវិបាក 1.4 បង្ហាញថាចំនួនធាតុនៃ $\mathcal{B}$ ស្មើនឹងវិមាត្រនៃ E ។ តាមទ្រឹស្ដីបទ 1.3 យើងទាញបាន $\mathcal{B}$ ជាគោលមួយ និង ដូច្នេះ $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ ។

ទ្រឹស្ដីបទ 1.8. លំហវុិចទ័រ $E_1, \cdots, E_p$ ជាផលបូកផ្ទាល់លុះត្រាតែ

$$E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{0}\} \tag{1.47}$$
$$(E_1 + E_2) \cap E_3 = \{\mathbf{0}\} \tag{1.48}$$
$$(E_1 + E_2 + E_3) \cap E_4 = \{\mathbf{0}\} \tag{1.49}$$
$$\vdots \tag{1.50}$$
$$(E_1 + E_2 + \cdots + E_{p-1}) \cap E_p = \{\mathbf{0}\} \tag{1.51}$$

សំរាយបញ្ជាក់
ឧបមាថាមាន $x_0 \neq 0, x_0 \in (E_1 + \cdots + E_k) \cap E_{k+1}$ ចំពោះ $k \in \{1, \cdots, p-1\}$ និង យក $x = x_1 + \cdots + x_p$ (ជាមួយនឹង $x_i \in E_i$)។
គេអាចសរសេរ

$$x = \underbrace{x_1 + \cdots + x_k + x_0}_{E_1 + \cdots + E_k} + \underbrace{(x_{k+1} - x_0)}_{E_{k+1}} + x_{k+2} + \cdots + x_p$$

ដូច្នេះ គេនឹងបានការបំបែកពីរផ្សេងគ្នានៃ x លើ E_i ។ ជាវិបាក E_i មិនមែនជាផលបូកផ្ទាល់។
ច្រាសមកវិញ ឧបមាថាល័ក្ខខ័ណ្ឌចាំបាច់ផ្ទៀងផ្ទាត់ និង

$$x = x_1 + \cdots + x_p$$
$$x = x_1' + \cdots + x_p'$$

ជាការបំបែកពីរនៃ x លើ E_i ។ តាមផលដក គេបាន

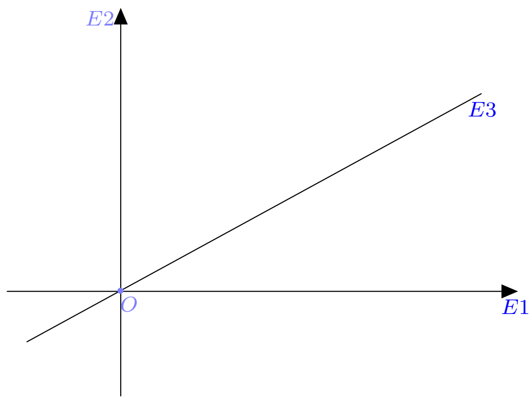
$$(x_1 - x_1') + \cdots + (x_{p-1} - x_{p-1}') = x_p' - x_p$$

យើងយក y ជាធាតុនេះ ($y = x_p' - x_p$) ។ គេបាន $y \in (E_1 + \cdots + E_{p-1}) \cap E_p$ ដូច្នេះ តាមល័ក្ខខ័ណ្ឌចុងក្រោយ គេបាន $y = 0$ ។ ជាវិបាក

$$x_p = x_{p'} \text{ និង } (x_1 - x_1') + \cdots + (x_{p-2} - x_{p-2}') = x_{p-1}' - x_{p-1}$$

វិចារណ៍ដូចគ្នា គេបាន $x_{p-1} = x'_{x'_{p-1}}$ និង ជាបន្តបន្ទាប់ $x_1 = x_1'$ ។ ដូច្នេះ x បំបែកបានតែមួយបែបគត់ មានន័យថា $E_1, \cdots, E_p$ ជាផលបូលផ្ទាល់។

ចំណាំ 1.7. ដូចបង្ហាញនៅក្នុងរូប ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_p = \{\mathbf{0}\}$ មិនគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីធានាថា $E_1, \cdots, E_p$ ជាផលបូកផ្ទាល់។
ដូចគ្នាដែរ ចំពោះល័ក្ខខ័ណ្ឌ $E_i \cap E_j = \{\mathbf{0}\}$ ចំពោះ $i \neq j$ ។



រូប 1.11:

$E = \mathbb{R}^2$ គេបាន E_1, E_2, E_3 មិនមែនជាផលបូកផ្ទាល់ ទោះបី $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{\mathbf{0}\}$ និង $E_i \cap E_j = \{\mathbf{0}\}$ (ចំពោះ $i \neq j$)។

លំហាត់

លំហាត់ 1.1. គេកំណត់លើ $\mathbb{R}_+^*$ ប្រមាណវិធីបូក និងគុណ តាងរៀងគ្នាដោយ $\oplus$ និង $\otimes$ និងកំណត់ដោយ៖

$$a \oplus b = ab \quad \text{ចំពោះ } a, b \in \mathbb{R}_+^* \tag{1.52}$$

និង

$$\lambda \otimes a = a^\lambda \quad \text{ចំពោះ } a \in \mathbb{R}_+^* \text{ និង } \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.53}$$

បង្ហាញថា $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយលើ $\mathbb{R}$ ។

លំហាត់ 1.2. គេយក $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ។ គេកំណត់លើ E ប្រមាណវិធីពីរ $\oplus$ និង $\odot$ ដោយ៖

$$(a, b) \oplus (c, d) = (ac, b + d) \quad \text{ចំពោះ } (a, b), (c, d) \in E \tag{1.54}$$

និង

$$\lambda \odot (a, b) = (a^\lambda, \lambda b) \quad \text{ចំពោះ } (a, b) \in E \text{ និង } \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.55}$$

បង្ហាញថា $(E, \oplus, \odot)$ ជា $\mathbb{R}$-លំហវ៉ិចទ័រមួយ។

លំហាត់ 1.3. E ជា $\mathbb{R}$-លំហវ៉ិចទ័រ។ គេយក $F = E \times E$ ហើយវាត្រូវបានប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីបូកធម្មជាតិនៃគូ *i.e.*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{ចំពោះ } (x, y), (x', y') \in F \tag{1.56}$$

គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្រៅលើ $\mathbb{C} \times E$ ដោយ៖

$$(a + ib) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx) \quad \text{ចំពោះ } (x, y) \in F \text{ និង } a, b \in \mathbb{R} \tag{1.57}$$

បង្ហាញថា $(F, +, \cdot)$ ជា $\mathbb{C}$-លំហវ៉ិចទ័រមួយ។ លំហនេះហៅថាភាពកុំផ្លិចនៃ E ។

លំហាត់ 1.4. គេប្រដាប់ $\mathbb{R}^2$ ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $+$ និងប្រមាណវិធីក្រៅ $\cdot$ កំណត់ចំពោះ (x, y), $(x, y \in \mathbb{R}^2)$ និង $\lambda \in \mathbb{R}$ ដោយ៖

$$(x, y) + (x, y) = (x + x, y + y) \tag{1.58}$$

និង

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda^{-1} y) \text{ បើ } \lambda \neq 0 \text{ និង } 0 \cdot (x, y) = (0, 0) \tag{1.59}$$

តើ $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ជា $\mathbb{R}$-លំហវ៉ិចទ័រមួយរឺទេ ?

លំហាត់ 1.5. គេកំណត់លើ $E = \mathbb{R}^2$ ប្រមាណវិធីពីរ $\oplus$ និង $\odot$ ដោយ៖

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{ចំពោះ } (x, y), (x', y') \in E \tag{1.60}$$

និង

$$\lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, \lambda^2 y) \quad \text{ចំពោះ } (x, y) \in E \text{ និង } \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.61}$$

តើ $(E, \oplus, \otimes)$ ជា $\mathbb{R}$-លំហវ៉ិចទ័រមួយរឺទេ ? ចូរអោយប្រមាណវិធីធម្មជាតិពីរដែលធ្វើ E ជា $\mathbb{R}$-លំហវ៉ិចទ័រមួយ។

លំហាត់ 1.6. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាតើ $E=\mathbb{R}^2$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $+$ និងប្រមាណវិធីក្រៅ $\cdot$ ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយលើ $\mathbb{R}$ រឺទេ ?

1. $(x,y)+(x',y)=(x+x',y+y')$ និង $\lambda\cdot(x,y)=(\lambda x,0)$
2. $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ និង $\lambda(x,y)=(\lambda x,y)$
3. $(x,y)+(x',y')=(x+y,x'+y')$ និង $\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$
4. $(x,y)+(x',y')=(y+y',x+x')$ និង $\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$
5. $(x,y)+(x',y')=(xx',yy')$ និង $\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$
6. $(x,y)+(x',y')=(xx',yy')$ និង $\lambda(x,y)=(\lambda x,y)$
7. $(x,y)+(x',y')=(x,y)$ និង $\lambda(x,y)=(\lambda x,y)$
8. $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ និង $\lambda(x,y)=(x,y)$

លំហាត់ 1.7. ក្នុង $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $+$ និងប្រមាណវិធីក្រៅ $\cdot$ ដោយ៖

$$(a,b)+(c,d)=(ac,bd) \tag{1.62}$$

និង

$$\alpha(a,b)=(\alpha a,\alpha b) \tag{1.63}$$

តើ $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{R}$ រឺទេ ?

លំហាត់ 1.8. បង្ហាញថាសំណុំនៃអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីបណ្តាក់ $\circ$ និងប្រមាណវិធីគុណក្រៅនៃអនុវត្តន៍ដោយចំនួនពិត មិនមែនជា $\mathbb{R}$ លំហវ៉ិចទ័រ។

លំហាត់ 1.9. លើ $\mathbb{R}^n$ គេកំណត់គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $+$ និងប្រមាណវិធីក្រៅ $\cdot$ ដោយ៖

$$(x_1,x_2\cdots,x_n)+(y_1,y_2\cdots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+_2\cdots,x_n+y_n) \tag{1.64}$$

និង

$$\lambda(x_1,x_2\cdots,x_n)=(\lambda x_1,2\lambda x_2\cdots,n\lambda x_n) \tag{1.65}$$

តើ $(E,+,\cdot)$ ជា $\mathbb{R}$ លំហវ៉ិចទ័ររឺទេ ?

លំហាត់ 1.10. $(E_i,+,\cdot)_{1\le i\le n}$ ជា n លំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ដូចគ្នា។ គេយក $E=\prod_{i=1}^{n}E_i$ និង សំណុំនេះប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីពីរ $+$ និង $\cdot$ ដោយ៖

$$(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n):=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n) \tag{1.66}$$

និង

$$\lambda\cdot(x_1\cdots,x_n):=(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n) \tag{1.67}$$

ចំពោះគ្រប់ $(x_1,\cdots,x_n)$ និង $(y_1,\cdots,y_n)$ នៃ E និង ចំពោះគ្រប់ λ នៃ $\mathbb{K}$ ។
បង្ហាញថា $(E_i,+,\cdot)$ ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ។ លំហនេះ ហៅថាលំហវ៉ិចទ័រផលគុណ។

លំហាត់ 1.11. បង្ហាញថាប្រសព្វនៃ n លំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E លើកាយ $\mathbb{K}$ តែមួយ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E លើកាយ $\mathbb{K}$ ។

លំហាត់ 1.12. តើសំណុំខាងក្រោមជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathbb{R}^3$ រឺទេ ?

1. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\, ax+by+cz=0\}$ ដែល a,b និង c ជាចំនួនពិត។
2. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\, ax+by+cz\le 0\}$ ដែល a,b និង c ជាចំនួនពិត។
3. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\, ax+by+cz=d\}$ ដែល a,b,c និង d ជាចំនួនពិត។
4. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\, x^2+y^2+z^2=0\}$
5. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\, x^2+y^2+z^2=R^2\}$ ដែល R ជាចំនួនពិត។
6. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\, x^2+y^2+z^2\le R^2\}$ ដែល R ជាចំនួនពិត។
7. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\, \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\}$
8. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\, \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\}$
9. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\, z=2(px^2+qy^2)\}$
10. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\, xyz=1\}$

លំហាត់ 1.13. គេយក $E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\, a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0\}$ ដែល $a_1,a_2,\cdots,a_n$ ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា E ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathbb{R}^n$ ។

លំហាត់ 1.14. គេយក $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\, x+2y+3z=0$ និង $3x+2y+z=0\}$ ។ តើ E ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathbb{R}^3$ រឺទេ ?

លំហាត់ 1.15. គេយក $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\, x=y$ និង $z=t\}$ ។ តើ E ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathbb{R}^4$ រឺទេ ?

លំហាត់ 1.16. បង្ហាញថាសំណុំ $C^0([a,b])$ នៃអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃលំហវ៉ិចទ័រ $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ចំពោះប្រមាណវិធីបូក និង គុណក្រៅធម្មជាតិនៃអនុគមន៍។

លំហាត់ 1.17. តើសំណុំខាងក្រោមជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $C^0(\mathbb{R})$ រឺទេ ?

1. $E=\left\{f\in C^0(\mathbb{R}), f(-x)=f(x)\right\}$
2. $E=\left\{f\in C^0(\mathbb{R}), f(-x)=-f(x)\right\}$
3. $E=\left\{f\in C^0(\mathbb{R}), f(x+T)=f(x)\right\}$ ដែល T ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានមិនសូន្យ។
4. $E=\left\{f\in C^0(\mathbb{R}), f(x)=\alpha f(\omega x)\right\}$ ដែល α និង ω ជាចំនួនពិត។
5. $E=\left\{f\in C^0(\mathbb{R}, f(x)=\alpha f(\omega x)+\beta\right\}$ ដែល α និង ω ជាចំនួនពិត។
6. $E=\left\{f\in C^0(\mathbb{R}), (2x+1)f(x)=xf(2x+1)\right\}$

7. $E = \left\{f \in C^0(\mathbb{R}), f(x) = 2xf(2x) + (2x+1)f(2x+1)\right\}$

លំហាត់ 1.18. គេយក $\text{Cos} = \left\{x \in C^0(\mathbb{R}), \exists (A,\varphi) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, x(t) = A\cos(t+\varphi)\right\}$ ។ សំណុំនេះជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃលំហវ៉ិចទ័រ $C^0(\mathbb{R})$ រឺទេ?

លំហាត់ 1.19. តើសំណុំខាងក្រោមជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathbb{R}_2[x]$ រឺទេ?

1. $E = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto ax^2,\, a \in \mathbb{R}\right\}$
2. $E = \{\mathbb{R} \ni x \mapsto ax,\, a \in \mathbb{R}\}$
3. $E = \{\mathbb{R} \ni x \mapsto a,\, a \in \mathbb{R}\}$
4. $E = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto ax^2 + bx,\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$
5. $E = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto ax^2 + bx + 1,\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$
6. $E = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a + b + c = 0\right\}$
7. $E = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R},\, b = a + c\right\}$
8. $E = \left\{\mathbb{R} \ni x \mapsto abx^2 + (a+b)x, a, b \in \mathbb{R}\right\}$

លំហាត់ 1.20. តើសំណុំខាងក្រោមជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $C^0([a,b])$ រឺទេ?

1. $E = \left\{f \in C^0([a,b]), \int_a^b f(x)dx = 0\right\}$
2. $E = \left\{f \in C^0([a,b]), f(b) - f(a) = \int_a^b tf(x)dx\right\}$
3. $E = \left\{f \in C^0([a,b]), \int_a^b f(x)dx = 1\right\}$
4. $E = \left\{f \in C^0([a,b]), \int_a^b \varphi(x)f(x)dx = 0\right\}$ ដែល $\varphi \in C^0([a,b])$ ជាអនុគមន៍ដែលអោយ។
5. $E = \left\{f \in C^0([a,b]), \int_a^b \varphi(x)\left[f(x)\right]^2 dx = 0\right\}$ ដែល $\varphi \in C^0([a,b])$ ជាអនុគមន៍ដែលអោយ។

លំហាត់ 1.21. បង្ហាញថាសំណុំ $C^n([a,b])$ នៃអនុគមន៍មានដេរីវេទី n ជាប់លើ $[a,b]$ ជាលំហ វ៉ិចទ័ររងនៃលំហវ៉ិចទ័រ $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ចំពោះប្រមាណវិធីបូក និង គុណក្រៅធម្មជាតិនៃអនុគមន៍។

លំហាត់ 1.22. តើសំណុំខាងក្រោមជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $C^0(\mathbb{R})$ រឺទេ?

1. $E = \left\{f \in C^1(\mathbb{R}), f(x) = \alpha f'(x)\right\}$ ដែល α ជាចំនួនពិត។
2. $E = \left\{f \in C^1(\mathbb{R}, f(x) = \alpha f'(x) + \beta\right\}$ ដែល α និង β ជាចំនួនពិត។
3. $E = \left\{f \in C^1(\mathbb{R}), f(x) = \alpha x f'(x)\right\}$ ដែល α ជាចំនួនពិត។

4. $E = \left\{f \in C^1(\mathbb{R}), f(x) = \alpha(f'(x))^3\right\}$ ដែល α ជាចំនួនពិត។

5. $E = \left\{f \in C^2(\mathbb{R}), f(x) = \alpha f''(x)\right\}$ ដែល α ជាចំនួនពិត។

6. $E = \left\{f \in C^2(\mathbb{R}), f(x) = \alpha f'(x) + \beta f''(x)\right\}$ ដែល α និង β ជាចំនួនពិត។

7. $E = \left\{f \in C^2(\mathbb{R}), f(x) = xf'(x) + x^2 f''(x)\right\}$

8. $E = \left\{f \in C^2(\mathbb{R}), f(x) = \alpha f'(x) f''(x)\right\}$ ដែល α ជាចំនួនពិត។

លំហាត់ 1.23. យើងបានរួចដឹងហើយថាសំណុំ $\mathcal{U}$ នៃស្វ៊ីតចំនួនពិតជាលំហាវ៉ិចទ័រចំពោះប្រមាណវិធីធម្មជាតិៈ បូក និង គុណដោយចំនួនពិត។ តើសំណុំខាងក្រោមជាលំហាវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathcal{U}$ រឺទេ ?

1. $E = \{u \in \mathcal{U}, u_{n+1} = 2u_n\}$

2. $E = \{u \in \mathcal{U}, u_{n+1} = u_n + 2\}$

3. $E = \{u \in \mathcal{U}, u_{n+1} = au_n\}$ ដែល a ជាចំនួនពិត។

4. $E = \{u \in \mathcal{U}, u_{n+1} = au_n + b\}$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។

5. $E = \{u \in \mathcal{U}, u_{n+1} = au_n + n\}$ ដែល a ជាចំនួនពិត។

6. $E = \{u \in \mathcal{U}, u_{n+1} = anu_n\}$ ដែល a ជាចំនួនពិត។

7. $E = \left\{u \in \mathcal{U}, u_{n+1} = au_n^3\right\}$ ដែល a ជាចំនួនពិត។

8. $E = \{u \in \mathcal{U}, u_{n+1} = u_{n+1} + u_n\}$

9. $E = \{u \in \mathcal{U}, u_{n+1} = au_{n+1} + bu_n\}$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។

10. $E = \{u \in \mathcal{U}, u_{n+1} = a(n+1)u_{n+1} + bnu_n\}$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។

លំហាត់ 1.24. បង្ហាញថាសំណុំនៃស្វ៊ីតចំនួនពិតរួមជាលំហាវ៉ិចទ័ររងនៃសំណុំនៃស្វ៊ីតចំនួនពិតចំពោះប្រមាណវិធី បូក និង គុណដោយចំនួនពិតនៃស្វ៊ីតចំនួនពិត។

លំហាត់ 1.25. តើសំណុំខាងក្រោមជាលំហាវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ រឺទេចំពោះប្រមាណវិធីបូក និង គុណដោយស្កាលែរធម្មជាតិនៃម៉ាទ្រីស ?

1. $M = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ដែល } a, b \in \mathbb{R}\right\}$

2. $M = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ ដែល } a, b \in \mathbb{R}\right\}$

3. $M = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \text{ ដែល } a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$

4. $M = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \text{ ដែល } a, b \in \mathbb{R}\right\}$

លំហាត់ 1.26. តើសំណុំខាងក្រោមជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ រឺទេចំពោះប្រមាណវិធីបូក និង គុណដោយស្កាលែរធម្មជាតិនៃម៉ាទ្រីស?

1. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ ដែល } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

2. $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \text{ ដែល } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

3. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & d \\ c & d & a \end{pmatrix} \text{ ដែល } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

4. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a+b & b+c \\ 0 & 0 & a+2b+c \end{pmatrix} \text{ ដែល } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

លំហាត់ 1.27. F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathbb{R}^4$ បង្ករដោយវ៉ិចទ័រ $u = (1, -1, -1, 1)$ និង $v = (1, -1, 1, -1)$ ។ កំណត់ចំនួនពិត λ និង μ ដើម្បីអោយវ៉ិចទ័រ $x = (\lambda, \mu, -1, 1)$ ស្ថិតនៅក្នុង F ។

លំហាត់ 1.28. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $a = (1, 2, 3)$ និង $b = (2, -1, 1)$ បង្ករបានលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathbb{R}^3$ ដូចគ្នានឹងវ៉ិចទ័រ $c = (1, 0, 1)$ និង $d = (0, 1, 1)$ ។

លំហាត់ 1.29. គេកំណត់យក E^F ជាសំណុំអនុគមន៍កំណតើពីសំណុំ E ទៅ F ។ សំណុំនេះមានទំរង់ជាលំហវ៉ិចទ័រចំពោះប្រមាណវិធីបូក និងគុណដោយស្កាលែរធម្មជាតិនៃអនុគមន៍។

1. បង្ហាញថា $\{\cos x, \sin x\}$ ជាគ្រួសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ។

2. បង្ហញថា $\{\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x\}$ ជាគ្រួសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ។

3. បង្ហញថា $\{\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ជាគ្រួសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ។

លំហាត់ 1.30. គេកំណត់យក $C^\infty(\mathbb{R})$ ជាសំណុំនៃអនុគមន៍ចំនួនពិតមានអថេរចំនួនពិត និងមានដេរីវេគ្រប់លំដាប់លើ $\mathbb{R}$ ។ សំណុំនេះជាលំហវ៉ិចទ័រចំពោះប្រមាណវិធីបូក និងគុណដោយស្កាលែរធម្មជាតិនៃអនុគមន៍។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos t \cosh t \\ x_2(t) &= \sin t \cosh t \\ x_3(t) &= \cos t \sinh t \\ x_4(t) &= \sin t \sinh t \end{aligned}$$

ជាធាតុនៃ $C^\infty(\mathbb{R})$ និង មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា។

លំហាត់ 1.31. 1. បង្ហាញថា $\{1, x-1\}$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}_1[x]$ ។

2. បង្ហាញថា $\{1, x-1, (x-1)(x-2)\}$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}_2[x]$ ។

3. បង្ហាញថា $\{1, x-1, (x-1)(x-2), \cdots, (x-1)(x-2)\cdots(x-n)\}$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}_n[x]$ ។

លំហាត់ 1.32. គេអោយ $n+1$ ចំនុច $(x_i)_{0\le i\le n}$ ផ្សេងគ្នាពីរៗ។ គេយក

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_j)\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_j)\cdots(x_i-x_n)},\ i,j\in[0,n],\ i\ne j$$

1. បង្ហាញថា $L_i(x_j)=\delta_{ij}$ ដែល δ_{ij} ជានិម្មិតសញ្ញារបស់លោក *Kronecker i.e.* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{បើ } i=j \\ 0 & \text{បើ } j\ne j \end{cases}$ ។

2. បង្ហាញថា $\{L_0, L_1, \cdots, L_n\}$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}_n[x]$ ។ គោលនេះហៅថាគោលឡាហ្គ្រង់។

3. យក p_n ជាពហុធាដឺក្រេទី n ដែលកាត់តាមចំនុច $(x_i, y_i)_{0\le i\le n}$ ។ បង្ហាញពហុធា p_n អាចសរសេរជាទំរង់

$$p_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \cdots + y_np_n(x)$$

ពហុធានេះហៅថាពហុធាអាំងទែរប៉ូឡាស្យុងឡាហ្គ្រង់។

4. អនុវត្តន៍៖ កំណត់ពហុធាដឺក្រេទីពីរដែលកាត់តាមចំនុច $(0,0)$, $(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$ និង $(\frac{\pi}{2},1)$ ។

លំហាត់ 1.33. យក (Σ) ជាប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ៖

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x-t=0 \end{cases}$$

បង្ហាញថាសំណុំចំលើយនៃ (Σ) បង្កើតបានលំហវ៉ិចទ័ររង F មួយនៃ $\mathbb{R}^4$ ។ កំណត់គោលមួយ និង វិមាត្រនៃ F ។

លំហាត់ 1.34. កំណត់តំលៃនៃ $t\in\mathbb{R}$ ដែលវ៉ិចទ័រ $\{(1,0,t),(1,1,t),(t,0,1)\}$ បង្កើតបានជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}^3$ ។

លំហាត់ 1.35. ក្នុង $\mathbb{R}^4$ គេអោយសំណុំ E នៃវ៉ិចទ័រ (x_1,x_2,x_3,x_4) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ ។ តើសំណុំ E ជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃ $\mathbb{R}^4$ រឺទេ ? បើមែន ចូរអោយគោលមួយនៃលំហវ៉ិចទ័ររងនេះ។

លំហាត់ 1.36. 1. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $v_1=(0,1,1)$, $v_2=(1,0,1)$ និង $v_3=(1,1,0)$ បង្កើតបានគោលមួយនៃ $\mathbb{R}^3$ ។ រកកុំប៉ូសង់នៃវ៉ិចទ័រ $w=(1,1,1)$ ក្នុងគោល (v_1,v_2,v_3) ។

2. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(-1,1,0)$ និង $v_3=(1,0,-1)$ បង្កើតបានគោលមួយនៃ $\mathbb{R}^3$ ។ រកកុំប៉ូសង់នៃវ៉ិចទ័រ $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ និង $w=(1,2,-3)$ ក្នុងគោល (v_1,v_2,v_3) ។

3. ក្នុង $\mathbb{R}^3$ ចូរអោយឧទាហរណ៍មួយនៃគ្រួសារសេរីដែលមិនបង្ករ។

4. ក្នុង $\mathbb{R}^3$ ចូរអោយឧទាហរណ៍មួយនៃគ្រួសារបង្ករដែលមិនសេរី។

លំហាត់ 1.37. កំណត់វិមាត្រនៃលំហវ៉ិចទ័រខាងក្រោម៖

1. $E=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=x\big\}$
2. $E=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y=z\big\}$
3. $E=\big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x+y=z+t\big\}$
4. $E=\Big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x+y=z+t$ **និង** $x-y=z-t\Big\}$
5. $E=\big\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4, x_1+x_2+x_3+x_4=0\big\}$
6. $E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n, x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$
7. $P=\big\{\mathbb{R}\ni x\mapsto ax^2+bx,\ a,b\in\mathbb{R}\big\}$
8. $P=\big\{\mathbb{R}\ni x\mapsto ax^2+bx+c, a,b,c\in\mathbb{R}, a+b+c=0\big\}$
9. $P=\big\{\mathbb{R}\ni x\mapsto ax^2+bx+c, a,b,c\in\mathbb{R},\ b=a+c\big\}$
10. $P=\big\{\mathbb{R}\ni x\mapsto ax^3+bx^2+bx+a, a,b\in\mathbb{R}\big\}$
11. $P=\big\{\mathbb{R}\ni x\mapsto ax^4+bx^3+cx^2+bx+a, a,b,c\in\mathbb{R}\big\}$
12. $\mathrm{Cos}=\big\{x\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists(A,\varphi)\in\mathbb{R}^2, \forall t\in\mathbb{R}, x(t)=A\cos(t+\varphi)\big\}$
13. $\mathrm{E}=\big\{x\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \forall t\in\mathbb{R}, x(t)=\alpha x+\beta+\gamma e^x\big\}$
14. $M=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\right.$ ដែល $\left. a,b\in\mathbb{R}\right\}$
15. $M=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\right.$ ដែល $\left. a,b\in\mathbb{R}\right\}$
16. $M=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A=\begin{pmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{pmatrix}\right.$ ដែល $\left. a,b\in\mathbb{R}\right\}$
17. $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\right.$ ដែល $\left. a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$
18. $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & a & d\\ c & d & a\end{pmatrix}\right.$ ដែល $\left. a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$
19. $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a+b & b+c\\ 0 & 0 & a+2b+c\end{pmatrix}\right.$ ដែល $\left. a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$
20. $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{pmatrix}\right.$ ដែល $\left. a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}\right\}$

21. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ ដែល } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

លំហាត់ 1.38. ក្នុង $\mathbb{R}^3$ គេអោយវិចទ័រ $\vec{v_1}(1,1,0)$, $\vec{v_2}(4,1,4)$ និង $\vec{v_3}(2,-1,4)$ ។

1. បង្ហាញថា $\vec{v_1}$ និង $\vec{v_2}$ មិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា។ ដូចគ្នាដែរចំពោះ $\vec{v_1}$ និង $\vec{v_3}$ រួចជាមួយនឹង $\vec{v_2}$ និង $\vec{v_3}$ ។
2. តើគ្រួសារ $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ សេរីរឺទេ ?

លំហាត់ 1.39. តើគ្រួសារខាងក្រោមមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែររឺទេ ?

1. $\vec{v_1}(1,0,1)$, $\vec{v_2}(0,2,2)$ និង $\vec{v_3}(3,7,1)$ ក្នុង $\mathbb{R}^3$ ។
2. $\vec{v_1}(1,0,0)$, $\vec{v_2}(0,1,1)$ និង $\vec{v_3}(1,1,1)$ ក្នុង $\mathbb{R}^3$ ។
3. $\vec{v_1}(1,2,1,2,1)$, $\vec{v_2}(2,1,2,1,2)$, $\vec{v_3}(1,0,1,1,0)$ និង $\vec{v_4}(0,1,0,0,1)$ ក្នុង $\mathbb{R}^5$ ។
4. $\vec{v_1}(2,4,3,-1,-2,1)$, $\vec{v_2}(1,1,2,1,3,1)$ និង $\vec{v_3}(0,-1,0,3,6,2)$ ក្នុង $\mathbb{R}^6$ ។
5. $\vec{v_1}(2,1,3,-1,4,-1)$, $\vec{v_2}(-1,1,-2,2,-3,3)$ និង $\vec{v_3}(1,5,0,4,-1,7)$ ក្នុង $\mathbb{R}^6$ ។

លំហាត់ 1.40. គេអោយក្នុង $\mathbb{R}^n$ គ្រួសារនៃបួនវិចទ័រមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ ។ តើគ្រួសារខាងក្រោមមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែររឺទេ ?

1. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3})$ ។
2. $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$ ។
3. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_4})$ ។
4. $(3\vec{e_1} + \vec{e_3}, \vec{e_3}, \vec{e_2} + \vec{e_3})$ ។
5. $(2\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} - 3\vec{e_2}, \vec{e_4}, \vec{e_2} - \vec{e_1})$ ។

លំហាត់ 1.41. ក្នុង $\mathbb{R}^4$ គេមានពីរវិចទ័រ $v_1 = (1,2,3,4)$ និង $v_2 = (1,-2,3,-4)$ ។ តើគេអាចកំណត់ x និង y ដើម្បីអោយ $(x,1,y,1) \in$ *Vect*$\{v_1, v_2\}$? និង ដើម្បីអោយ $(x,1,1,y) \in$ *Vect*$\{v_1, v_2\}$?

លំហាត់ 1.42. E ជាលំហវិចទ័រមួយលើកាយ $\mathbb{R}$ និង x, y, z, t ជាគ្រួសារសេរីមួយនៃ E ។ តើគ្រួសារខាងក្រោមមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែររឺទេ ?

1. $x, 2y, z.$
2. $x, z.$
3. $x, 2x + t, t.$
4. $3x + z, z, y + z.$
5. $2x + y, x - 3y, t, y - x.$

លំហាត់ 1.43. E ជាលំហវ៉ិចទ័របង្ករដោយវ៉ិចទ័រ $v_1 = (2, 3, -1)$ និង $v_2 = (1, -1, -2)$ ហើយ F ជាលំហវ៉ិចទ័របង្ករដោយវ៉ិចទ័រ $w_1 = (3, 7, 0)$ និង $w_2 = (5, 0, -7)$ ។ បង្ហាញថា E និង F ស្មើគ្នា។

លំហាត់ 1.44. ក្នុង $\mathbb{R}^4$ ចូរប្រៀបធៀបលំហវ៉ិចទ័រ F និង G ដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned} F &= \textit{Vect}\{(1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5)\} \\ G &= \textit{Vect}\{(-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\} \end{aligned}$$

លំហាត់ 1.45. គេឧបមាថា $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ ជាវ៉ិចទ័រមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នានៃ $\mathbb{R}^n$ ។

1. តើវ៉ិចទ័រ $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_n - v_1$ អាស្រ័យ រឺ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា ?
2. តើវ៉ិចទ័រ $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_n + v_1$ អាស្រ័យ រឺ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា ?
3. តើវ៉ិចទ័រ $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \dots, v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ អាស្រ័យ រឺ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា ?

លំហាត់ 1.46. គេយក $\alpha \in \mathbb{R}$ និង $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} f_\alpha(x) = 1 & \text{បើ } x = \alpha \\ f_\alpha(x) = 0 & \text{បើ } x \neq \alpha \end{cases}$$

បង្ហាញថាគ្រួសារ $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ សេរី។

លំហាត់ 1.47. គេយក $\alpha \in \mathbb{R}$ និង $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{\alpha x}$ ។
បង្ហាញថាគ្រួសារ $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ សេរី។

លំហាត់ 1.48. បង្ហាញថា $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ ជាគ្រួសារសេរីនៃលំហវ៉ិចទ័រ $\mathbb{R}$ លើ $\mathbb{Q}$ ។

លំហាត់ 1.49. គេយក $E = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \,:\, (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$ ។

1. បង្ហាញថា E ជាលំហវ៉ិចទ័រលើ $\mathbb{Q}$ ។
2. កំណត់វិមាត្រនៃ E លើ $\mathbb{Q}$ ។
3. តើលំហវ៉ិចទ័រ $\mathbb{R}$ លើ $\mathbb{Q}$ មានវិមាត្រកំណត់រឺទេ ?

លំហាត់ 1.50.

1. គណនាចំពោះចំនួនគតើធម្មជាតិ p និង q អាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$J(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx,\ K(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos(px)\sin(qx)\,dx \text{ និង}$$
$$L(p,q) = \int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,dx$$

2. បង្ហាញថាគ្រួសារនៃអនុគមន៍ $(\cos(px))_{p \in \mathbb{N}} \cup (\sin(qx))_{q \in \mathbb{N}^*}$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

លំហាត់ 1.51. គេយក P_0, P_1, P_2 និង $P_3 \in \mathbb{R}_2[x]$ កំណត់ដោយ

$$P_0(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \ \ P_1(X) = \frac{X(X-1)}{2},$$

$$P_2(X) = 2X(X-2), \ \ P_3(X) = \frac{(X-1)(X-3)}{3}$$

កំណត់ $1, \ X, \ X^2$ ជាអនុគមន៍នៃ $P_0, \ P_1$ និង P_2 ។ គេកំណាតើយក $F = Vect\{P_0, P_1\}$ និង $G = Vect\{P_2, P_3\}$ ។ គណនា $\dim F$, $\dim G$, $\dim(F+G)$ និង $\dim(F \cap G)$ ។
ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

លំហាត់ 1.52. ចូរអោយវិមាត្រនៃលំហវ៉ិចទ័ររង F នៃ $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ បង្ករដោយ $f_1(x) = \sin^2 x, f_2(x) = \cos^2 x, f_3(x) = \sin 2x$ និង $f_4(x) = \cos 2x$ ។

លំហាត់ 1.53. បង្ហាញថាគ្រប់លំហវ៉ិចទ័ររងនៃលំហវ៉ិចទ័រមួយមានវិមាត្រកំណត់មានវិមាត្រកំណត់ដែរ។

លំហាត់ 1.54. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយមានវិមាត្រកំណត់ និង F, G ជាពីរលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E ។ បង្ហាញថា $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ ។

លំហាត់ 1.55. F, G, H ជាលំហវ៉ិចទ័ររងបីនៃលំហវ៉ិចទ័រ E មួយ។ ចូរប្រៀបធៀប $F \cap (G + (F \cap H))$ និង $(F \cap G) + (F \cap H)$ ។

លំហាត់ 1.56. E ជា $\mathbb{K}$-លំហវ៉ិចទ័រមួយ។ A, B និង C ជាលំហវ៉ិចទ័ររងបីនៃ E ដែលផ្ទៀងផ្ទាតើ $A \cap B = A \cap C$, $A + B = A + C$ និង $B \subset C$ ។ បង្ហាញថា $B = C$ ។

លំហាត់ 1.57. ក្នុង $E = \mathbb{R}^4$ គេអោយ $V = \{(x,y,z,t) \in E, \ x - 2y = 0$ និង $y - 2z = 0\}$ និង $W = \{(x,y,z,t) \in E, \ x + z = y + t\}$ ។

1. បង្ហាញថា V និង W ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E ។
2. ចូរអោយគោលមួយនៃ V, W និង $V \cap W$ ។
3. បង្ហាញថា $E = V + W$។

ជំពូក 2

វិធីសាស្ត្រនៃធាតុវិល

2.1 ការសិក្សានៃប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរតាមវិធីសាស្ត្រនៃធាតុវិល

និយមន័យ 2.1. គេហៅថាប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរជាប្រព័ន្ធមួយមានទំរង់៖

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \cdots & + & a_{pn}x_n & = & b_p \end{cases} \tag{2.1}$$

a_{ij} និង b_i ជាធាតុនៃ $\mathbb{K}$ ដែលអោយ។

x_i ជាអញ្ញាតិ។

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការមានន័យថាកំណត់ $x_i \in \mathbb{K}$ បើសិនជាមាន ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការទាំងអស់។

វិធីសាស្ត្រនៃធាតុវិលត្រូវបានបង្កើតឡើងលើកំណត់ចំណាំខាងក្រោម៖

លក្ខណៈ 2.1. សំណុំនៃចំលើយនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរមួយមិនប្រែប្រួលទេ បើគេធ្វើប្រមាណវិធីលើសមីការ ហៅថាប្រមាណវិធីងាយៗ ខាងក្រោម៖

1. ប្តូរលំដាប់នៃសមីការ។
2. គុណសមីការមួយដោយចំនួនថេរមួយមិនសូន្យនៃ $\mathbb{K}$ ។
3. បូកទៅនឹងសមីការមួយ បន្សំលីនេអ៊ែរមួយនៃសមីការផ្សេងទៀត។

ឧទាហរណ៍ 2.1. គេអោយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2w & = & 4 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & - & 3w & = & 5 \end{cases}$$

យើងធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗដើម្បីបំបាត់មេគុណទាំងពីរដែលគូសក្នុងរង្វង់។

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} = 2L_2 - 3L_1 \\ L_3^{(1)} = 2L_3 - 3L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1 \\ & & y & + & 4z & - & 5w & = & 5 \\ & & 3y & + & 12z & - & 15w & = & 7 \end{array} \right.$$

សំណុំចំលើយននៃប្រព័ន្ធមិនបានប្រែប្រួលទេ។ ឥឡូវនេះ យើងបន្តធ្វើប្រមាណវិធីលើសមីការទាំងពីរចុងក្រោយ៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - 3L_2^{(1)} \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1 \\ & & y & + & 4z & - & 5w & = & 5 \\ & & & & & & 0w & = & -8 \end{array} \right.$$

ដូច្នេះ យើងឃើញថាប្រព័ន្ធគ្មានចំលើយ។

ឧទាហរណ៍ 2.2. គេអោយប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ 1x & - & 4y & - & 6z & = & 2 \end{array} \right.$$

យើងធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗតាមជួរដេកដើម្បីបានប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 - 2L_1 \\ L_3^{(1)} = L_3 - L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & - & y & + & 3z & = & 0 \\ & & 2y & - & 5z & = & 1 \end{array} \right.$$

យើងបន្តធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗតាមជួរដេកដើម្បីបានប្រព័ន្ធសមីការថ្មី៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} + 2L_2^{(1)} \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & - & y & + & 3z & = & 0 \\ & & & & z & = & 1 \end{array} \right.$$

ដូច្នេះយើងបាន $z = 1$ ។ យើងជំនួសតំលៃនេះក្នុងសមីការ $L_2^{(1)}$ យើងបាន $y = 3$ ។ ជាបញ្ចប់ យើងជំនួសតំលៃទាំងនេះក្នុង L_1 ដើម្បីបាន $x = 4$ ។

ដូច្នេះប្រព័ន្ធសមីការមានចំលើយតែមួយគត់ $x = -4,\ y = 3,\ z = 1$ ។

ដូចយើងឃើញហើយថាវិធីសាស្ត្រនេះតំរូវអោយសរសេរប្រព័ន្ធជាទំរង់ជាថ្នាក់ដើម្បីអាចដោះ ស្រាយសមីការទាំងអស់ដោយជំនួសចំលើយពីក្រោមឡើងមកលើ។

ឥឡូវនេះ យើងលំអិតដំណើរការនៃវិធីសាស្ត្រនៃធាតុវិល។

យើងអោយម៉ាទ្រីសមួយ *i.e.* តារាងចតុកោណកែងមួយនៃធាតុនៃ $\mathbb{K}$ រៀបតាមជួរដេក និងជួរឈរ។ ចំពោះប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរមួយ គេហៅថាម៉ាទ្រីសនៃប្រព័ន្ធជាម៉ាទ្រីសជាមេគុណនៃអង្គរទីមួយនៃសមីការ។ ជាឧទាហរណ៍ ចំពោះឧទាហរណ៍ 2.2 ម៉ាទ្រីសនៃប្រព័ន្ធគឺ

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

គេនឹងកំណត់យក $L_1, L_2, \cdots, L_k$ ជាជួរដេកផ្សេងគ្នានៃម៉ាទ្រីស។ ជួរដេក L_i ហៅថាជួរដេកទី i ។
គេហៅថាម៉ាទ្រីសមួយមានទំរង់ជាថ្នាក់បើជួរដេកចាប់ផ្តើមដោយចំនួនមួយនៃសូន្យកើនដាច់ ខាតដើម្បីអោយសន្ទស្សន៍កើន។

ឧទាហរណ៍ 2.3. ម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសមួយមានទំរង់ជាថ្នាក់ ចំណែកឯម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសមួយគ្មានទំរង់ជាថ្នាក់។

វាមានលក្ខណៈងាយស្រួលដើម្បីសិក្សាថាតាមប្រមាណវិធីងាយៗនៃជួរដេក គេអាចសរសេរ ជានិច្ចកាលប្រព័ន្ធក្រោមទំរង់ម៉ាទ្រីសជាថ្នាក់ មានន័យថាគេអាចជំនួសប្រព័ន្ធដោយប្រព័ន្ធមួយទៀតដែលម៉ាទ្រីសមេគុណជាម៉ាទ្រីសទំរង់ជាថ្នាក់។
ដើម្បីធ្វើដូច្នេះ គេជាដំបូងគេត្រូវអោយសមីការទីមួយចាប់ផ្តើមដោយមេគុណមួយមិនសូន្យ ដែលគេអាចធ្វើអោយកើតមានជានិច្ចកាលដោយប្តូរលំដាប់នៃសមីការ។ មេគុណមិនសូន្យនេះហៅថាធាតុរិល។

ឧទាហរណ៍ 2.4. គេមានប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & z & = & 11 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & 13 \\ 4x & + & 11y & & & = & 37 \end{array} \right.$$

តាមប្រមាណវិធីជួរដេក គេមានប្រព័ន្ធ៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 - L_1 \\ L_3^{(1)} = L_3 - 2L_1 \\ L_4^{(1)} = L_4 - 4L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ & & y & + & 4z & = & 7 \\ & & y & + & 2z & = & 5 \\ & & 3y & + & 12z & = & 21 \end{array} \right.$$

ជាបន្ទាប់ យើងបាន៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - L_2^{(1)} \\ L_4^{(2)} = L_4^{(1)} - 3L_2^{(1)} \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ & & y & + & 4z & = & 7 \\ & & & & 2z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធសមីការមានទំរង់ជាថ្នាក់។ យើងបាន $z = 1$ រួចដោយជំនួសពីក្រោមឡើងលើ $y = 3, x = 1$ ។
ដូច្នេះប្រព័ន្ធមានចំលើយតែមួយគត់ $x = 1, y = 3, z = 1$ ។

ឧទាហរណ៍ 2.5.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & - & 2w & = & 5 \\ x & - & y & + & 9z & - & w & = & 7 \\ x & - & 2y & + & 7z & - & 2w & = & 9 \end{array} \right.$$

យើងធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗតាមជួរដេកដើម្បីបានប្រព័ន្ធសមីការថ្មី៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 - L_1 \\ L_3^{(1)} = L_3 - L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & - & 2w & = & 5 \\ & & 2y & + & 5z & + & w & = & 2 \\ & & y & + & 3z & & & = & 4 \end{array} \right.$$

រួច

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} = 2L_3^{(1)} - L_2^{(1)} \end{array} \left\{ \boxed{\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & + & 4z \\ & & 2y & + & 5z \\ & & & & z \end{array}} \begin{array}{ccrcr} - & 2w & = & 5 \\ + & w & = & 2 \\ - & w & = & 6 \end{array} \right.$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធសមីការមានទំរង់ជាថ្នាក់។ ដោយអោយទៅនឹង w តំលៃចំនួនពិត λ ណាមួយ គេសរសេរប្រព័ន្ធដែលម៉ាទ្រីសបន្ថែមរបស់វាត្រូវបានគូសជាប្រអប់។

$$\left\{ \boxed{\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & + & 4z \\ & & 2y & + & 5z \\ & & & & z \end{array}} \begin{array}{cr} = & 5 + 2\lambda \\ = & 2 - \lambda \\ = & 6 + \lambda \end{array} \right.$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធសមីការមានចំលើយតែមួយគត់ចំពោះជំរើសនៃ λ និមួយៗ។
ដោយដោះស្រាយ យើងរកឃើញ៖

$$x = -61 - 11\lambda,\ y = -14 - 3\lambda,\ z = 6 + \lambda,\ w = \lambda$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធសមីការមានចំលើយរាប់មិនអស់មួយទៅនឹងប៉ារ៉ាម៉ែត λ មួយ។
ឧទាហរណ៍ទាំងអស់ដែលយើងទើបតែយកមកបង្ហាញវិធីសាស្ត្រដើម្បីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរមួយ។

វិធីសាស្ត្រនៃដំណោះស្រាយនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរមួយ

1. ជាដំបូង យើងត្រូវរៀបចំប្រព័ន្ធដោយប្តូរគ្នាលំដាប់នៃសមីការ និង អថេរ ដើម្បីអោយធាតុវិលមិនសូន្យ។
2. គេធ្វើប្រព័ន្ធអោយមានទំរង់ថ្នាក់។
   ពីរករណីត្រូវអោយ៖

   ករណីទី១៖ សមីការមួយមានទំរង់

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b \text{ ជាមួយនឹង } b \neq 0 \qquad (2.2)$$

ក្នុងករណីនេះ ប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចំលើយ។ គេថាប្រព័ន្ធ**មិនចុះសំរុង**។

ករណីទី២៖ បើគ្មានសមីការដែលមានទំរង់ 2.2 ទេ សមីការមួយមានទំរង់

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0 \tag{2.3}$$

សមីការអាចគ្លាតគ្នា។ បន្ទាប់ពីធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗតាមជួរដេក គេនឹងទទួលបានប្រព័ន្ធសមីការមួយមានទំរង់៖

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & a_{ir}x_r & + & a_{i\,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ & & & \ddots\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & a_{ps}x_s & + & \cdots & + & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right. \tag{2.4}$$

ដែលមេគុណគូសក្នុងរង្វង់ជាចំនួនមិនសូន្យ។

ដូច្នេះ គេសរសេរម៉ាទ្រីសទំរង់ជាថ្នាក់មួយដែលជួរដេកចុងក្រោយរបស់វាមានធាតុតែមួយមិនសូន្យ(ម៉ាទ្រីសគូសក្នុងប្រអប់)។
អញ្ញាត្តិដែលលេចឡើងនៅខាងដើមសមីការនិមួយៗ(អញ្ញាត្តិដែលត្រូវនឹងមេគុណគូសក្នុងរង្វង់) ហៅថាថាអញ្ញាត្តិចំបង និងអញ្ញាត្តិផ្សេងទៀតបើមានហៅថាអញ្ញាត្តិសេរី។
ពីរករណីអាចកើតឡើង៖

i. ករណីដែលគ្មានអថេរសេរី៖
ដូច្នេះ ប្រព័ន្ធមានចំលើយមួយ និង តែមួយគត់ដែលទទួលបានដោយដោះស្រាយសមីការចុងក្រោយ រួចដោយជំនួសតំលៃអញ្ញាត្តិដែលរកឃើញពីក្រោមឡើងលើ។

ii. ករណីដែលមានអថេរសេរី៖
ដូច្នេះគេអោយទៅនឹងអថេរសេរីតំលៃប៉ារ៉ាម៉ែត $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ ។ គេសរសេរ λ_i នៅអង្គទីពីរ។ ដូច្នេះប្រ័ព្វមានចំលើយមួយ និង តែមួយគត់ចំពោះការជ្រើសរើស $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ និមួយៗ មានន័យថាប្រព័ន្ធមានមានចំលើយរាបើមិនអស់មួយអាស្រ័យនឹង $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ ។

ឧទាហរណ៍ 2.6. គេអោយប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & + & 4w & = & 5 \\ 5x & + & 10y & - & 8z & + & 11w & = & 12 \end{array}\right.$$

ដោយធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗនៃជួរដេក យើងបានប្រព័ន្ធសមីការថ្មី៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 - 2L_1 \\ L_3^{(1)} = L_3 - 5L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \\ & & & & z & - & 2w & = & 1 \\ & & & & 2z & - & 4w & = & 2 \end{array}\right.$$

ជាបន្ទាប់ យើងបាន៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - 2L_2^{(1)} \end{array} \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \\ & & & & z & - & 2w & = & 1 \\ & & & & & & 0w & = & 0 \end{array} \right.$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធសមីការសមមូលនឹងប្រព័ន្ធខាងក្រោម៖

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \\ & & & & z & - & 2w & = & 1 \end{array} \right.$$

x និង z ជាអញ្ញាត្តិចំបង ហើយ y និង w ជាអញ្ញាត្តិសេរី។ ដោយយក $y = \lambda$ និង$w = \mu$ យើងបាន៖

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & 2z & = & 2 & - & 2\lambda & - & 3\mu \\ & & z & = & 1 & + & 2\mu & & \end{array} \right.$$

ដូច្នេះ $x = 4 - 2\lambda + \mu,\ y = \lambda,\ z = 1 + 2\mu,\ w = \mu$ ។

2.2 ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែន

និយមន័យ 2.2. គេហៅថាប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែនជាប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរមួយដែលអង្គទាំងពីររបស់វាស្មើនឹងសូន្យ៖

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \cdots & + & a_{pn}x_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.5}$$

ប្រព័ន្ធសមីការបែបនេះជានិច្ចកាលមានចំលើយមួយយ៉ាងតូចជាចំលើយសូន្យ៖ $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ហៅថាចំលើយងាយ។

វាមានអត្ថប្រយោជន៍ណាស់ដើម្បីដឹងចំលើយមិនសូន្យ។ ដូច្នេះ យើងមានទ្រឹស្តីបទខាង ក្រោម៖

ទ្រឹស្តីបទ 2.1. សំណុំចំលើយនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែនមួយមាន n អញ្ញាត្តិជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃ $\mathbb{K}^n$ ។ បើប្រព័ន្ធសមីការសរសេរក្រោមទំរង់ជាថ្នាក់ដែលមាន k សមីការ នោះលំហនៃចះលើយមានវិមាត្រ $n - k$ ។
ជាពិសេស ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែនដែលមានអញ្ញាត្តិច្រើនជាងសមីការ $(n > p)$ មានចំលើយមិនសូន្យ។

ចំណាំ 2.1. ចំនួនវិមាត្រនៃសំណុំចំលើយក៏ស្មើនឹងចំនួនអញ្ញាត្តិសេរីដែលកើតឡើងក្នុងទំរង់ជាថ្នាក់។

សំរាយបញ្ជាក់
ឧបមាថាគេមានប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែន 2.5 និងយក S ជាសំណុំចំលើយរបស់វា។

យើងបានយ៉ាងងាយ $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0) \in S$ ហើយ បើ $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n) \in S$ និង $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ នោះ $\lambda x + \mu \hat{x} \in S$ ។
ឥឡូវនេះ ឧបមាថាប្រព័ន្ធសមីការ 2.5 សរសេរជាទំរង់ជាថ្នាក់ដែលមាន k សមីការ។ ដូច្នេះ មានអញ្ញាតិចំបង ចំនួន k និងអញ្ញាតុតិសេរីចំនួន $n-k$ ។ ដោយមិនប្តូរសន្ទសន្សន៍នៃ x_i យើងអាចឧបមាថា $x_1, \cdots, x_{n-k}$ ជាអថេរសេរី និង $x_{n-k+1}, \cdots, x_n$ ជាអថេរចំបង។ ចំលើយចំបងនេះនឹងត្រូវកំណត់សរសេរជាទំរង់៖

$$S = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-k}, x_{n-k+1}, \cdots, x_n) \tag{2.6}$$

ដែល $x_{n-k+1}, \cdots, x_n$ ត្រូវបញ្ជាក់ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ λ_i ៖

$$\begin{array}{lllllll} x_{n-k+1} & = & a_1\lambda_1 & + & \cdots & + & a_{n-k}\lambda_{n-k} \\ x_{n-k+1} & = & b_1\lambda_1 & + & \cdots & + & b_{n-k}\lambda_{n-k} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & = & l_1\lambda_1 & + & \cdots & + & l_{n-k}\lambda_{n-k} \end{array}$$

ដូច្នេះ ចំលើយទូទៅ S ជា n-ធាតុកំណត់ដោយ៖

$$S = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-k}, \sum_{i=1}^{n-k} a_i\lambda_i, \sum_{i=1}^{n-k} b_i\lambda_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n-k} l_i\lambda_i)$$

ដែលគេអាចសរសេរក្រោមទំរង់

$$\begin{aligned} S = \lambda_1(1, 0, \cdots, 0, a_1, b_1, \cdots, l_1) + \lambda_2(0, 1, 0, \cdots, 0, a_2, b_2, \cdots, l_2) + \cdots \\ + \lambda_{n-k}(0, 0, \cdots, 1, a_{n-k, b_{n-k}}, \cdots, l_{n-k}) \end{aligned}$$

ដូច្នេះគេក៏បាន $n-k$ ចំលើយ៖

$$\begin{array}{l} (1, 0, \cdots, 0, a_1, b_1, \cdots, l_1) \\ (0, 1, \cdots, 0, a_2, b_2, \cdots, l_2) \\ \vdots \\ (0, 0, \cdots, 1, a_{n-k}, b_{n-k}, \cdots, l_{n-k}) \end{array}$$

ទទួលបានដោយអោយតំលៃទៅនឹង $n-k$-ធាតុ $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-k})$ បន្តបន្ទាប់តំលៃ $(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0)$, $\cdots$, $(0, \cdots, 0, 1)$ ។ សំណុំចំលើយបង្កើតបានជាគ្រួសារបង្កករ ព្រោះចំលើយទូទៅជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ ចំលើយទាំងនេះ។ ជាការពិតណាស់ យើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់បានដោយងាយថាវាជាគ្រួសារសេរី។ ដូច្នេះវាជាគោល មួយ រួច $\dim S = n-k$ ។

ចំណាំ 2.2. ដូចយើងបានឃើញហើយនៅសំរាយបញ្ជាក់ គេទទួលបានគោលមួយនៃចំលើយដោយអោយ តំលៃទៅនឹងអថេរសេរីជាបន្តបន្ទាប់តំលៃ $(0, 1, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1)$ ។

ឧទាហរណ៍ 2.7. គេអោយប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrrr} x & + & 2y & - & 3z & + & t & - & w & = & 0 \\ x & + & 3y & - & 4z & & & + & w & = & 0 \\ 2x & + & 5y & - & 7z & + & t & & & = & 0 \end{array} \right.$$

ដោយធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗតាមជួរដេក គេទទួលបានប្រព័ន្ធសមីការទំរង់ជាថ្នាក់៖

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \boxed{x + 2y} & - & 3z & + & t & - & w & = & 0 \\ \boxed{y} & - & z & - & t & + & 2w & = & 0 \end{array}\right.$$

យើងបាន z, t, w ជាអថេរសេរី ហើយ ដូច្នេះ សំណុំចំលើយជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃ $\mathbb{R}^5$ មានវិមាត្របី។ ចំលើយទូទៅគឺ

$$x = \lambda - 3\mu + 5\nu,\ y = \lambda + \mu - 2\nu,\ z = \lambda,\ t = \mu,\ w = \nu$$

មានន័យថា

$$\begin{array}{rcl} S & = & (\lambda - 3\mu + 5\nu,\ \lambda + \mu - 2\nu,\ \lambda, \mu, \nu) \\ & = & \lambda(1,1,1,0,0) + \mu(-3,1,0,1,0) + \nu(5,-2,0,0,1) \end{array}$$

ដូច្នេះ គោលមួយនៃលំហចំលើយគឺជាវ៉ិចទ័រ $(1,1,1,0,0), (-3,1,0,1,0), (5,-2,0,0,1)$ ។

2.3 ការអនុវត្តន៍ទៅនឹងគ្រួសារសេរី និង ទៅនឹងគ្រួសារបង្កករ

2.3.1 ការកំណត់នៃគ្រួសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ

ឧទាហរណ៍ 2.8. ផ្ទៀងផ្ទាតើថាវ៉ិចទ័រ $v_1 = (1,-2,-3)$, $v_2 = (2,3,-1)$, $v_3 = (3,2,1)$ នៃ $\mathbb{R}^3$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរឺទេ ?

យើងផ្ទៀងផ្ទាតើថាបើ $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = \mathbf{0}$ នោះគេបាន $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ មានន័យថាបើប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

មានចំលើយតែមួយគត់ នោះវាជាចំលើយសូន្យ។
យើងបាន៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 + 2L_1 \\ L_3^{(1)} = L_3 + 3L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ & & 5x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

ជាបន្ទាប់៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} = 7L_3^{(1)} - 5L_2^{(1)} \end{array} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ & & & & 30x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

ដូច្នេះ យើងបាន $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ។ ដូច្នេះវាជាគ្រួសាមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

2.3.2 ការកំណត់ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែរនៃគ្រួសារមួយនៃវ៉ិចទ័រ

ឧទាហរណ៍ 2.9. ការកំណត់ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែរនៃវ៉ិចទ័រ $v_1 = (1,1,0,2)$, $v_2 = (-1,0,2,1)$, $v_3 = (0,1,2,3)$, $v_4 = (1,3,4,8)$ នៃ $\mathbb{R}^4$ ។

ដូច្នេះ យើងកំណត់តំលៃនៃ x_i ចំពោះ $i = 1,2,3,4$ ដែល៖

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = \mathbf{0}$$

មានន័យថាកំណត់ចំលើយនៃប្រព័ន្ធ៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

ដោយធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗតាមជួរដេកនៃប្រព័ន្ធសមីការ យើងទទួលបានប្រព័ន្ធសមីការថ្មី៖

$$\begin{array}{l} L_1^{(1)} = L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 - L_1 \\ L_3^{(1)} = L_3 \\ L_4^{(1)} = L_4 - 2L_1 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

រួច

$$\begin{array}{l} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} = L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - 2L_2^{(1)} \\ L_4^{(2)} = L_4^{(1)} - 3L_2^{(1)} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

ដោយយក $x_3 = \lambda$, $x_3 = \mu$ យើងរកបាន $x_1 = -\lambda - 3\mu$, $x_2 = -\lambda - 2\mu$ ។
ដូច្នេះ គេបានទំនាកើទំនង៖

$$(\lambda + 3\mu)v_1 + (\lambda + 2\mu)v_2 - \lambda v_3 - \mu v_4 = \mathbf{0} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

ដោយយកទៅនឹងគូ (λ, μ) តំលៃ $(1,0)$ និង $(0,1)$ យើងទទួលបាន $v_1 + v_2 - v_3 = \mathbf{0}$ និង $3v_1 + 2v_2 - v_4 = \mathbf{0}$ ។

2.3.3 ការផ្ទៀងផ្ទាត់នៃវ៉ិចទ័រ v មួយស្ថិតនៅក្នុងលំហបង្ករដោយ $\{v_1, \cdots, v_p\}$ និង ការកំណត់នៃកុំប៉ូសង់នៃ v លើ $v_1, \cdots, v_p$

ឧទាហរណ៍ 2.10. ក្នុង $\mathbb{R}^4$ គេយក $v = (3,9,-4,-2)$ ។ បង្ហាញថា $v \in [v_1, v_2, v_3]$ ដែល $v_1 = (1,-2,0,3), v_2 = (2,3,0,-1), v_3 = (2,-1,2,1)$ និងកំណត់កុំប៉ូសង់នៃ v លើ v_1, v_2, v_3 ។

យើងត្រូវបង្ហាញថាគេអាចរក $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ ដែល

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$$

មានន័យថាប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ 2x_3 = -4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

មានចំលើយមួយយ៉ាងតិច។
គេរកឃើញយ៉ាងងាយ $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = -2$ ។
ដូច្នេះ $v \in [v_1, v_2, v_3]$ និង $v = v_1 + 3v_2 - 2v_3$ ។

2.3.4 **ការផ្ទៀងផ្ទាត់នៃគ្រួសារបង្ករមួយ**

ឧទាហរណ៍ 2.11. បង្ហាញថាគ្រួសារ $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 1, -1)$ បង្ករ $\mathbb{R}^3$ ។

យើងត្រូវបង្ហាញថាគ្រប់វ៉ិចទ័រ $v \in \mathbb{R}^3$ ស្ថិតនៅក្នុង $[v_1, v_2, v_3]$ មានន័យថា គ្រប់ត្រីធាតុ $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ប្រព័ន្ធសមីការ $(a, b, c) = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$ មានចំលើយមួយយ៉ាងតិច។
យើងបាន

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_1 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + x_2 - x_3 = c \end{cases}$$

រួច

$$\begin{matrix} L_1^{(1)} = L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 - L_1 \\ L_3^{(1)} = L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 + x_3 = b - a \\ x_2 - x_3 = c - a \end{cases}$$

ជាចុងក្រោយ

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = \dfrac{b + c - 2a}{2} \\ x_3 = \dfrac{b - c}{2} \end{cases}$$

ដូច្នេះ គេបានចំលើយ x_1, x_2, x_3 មួយចំពោះគ្រប់ a, b, c ។ ដូច្នេះគ្រួសារខាងលើជាគ្រួសារបង្ករ។

2.3.5 **ការកំណត់គោលមួយនៃ** $F \cap G$

ឧទាហរណ៍ 2.12. F និង G ជាលំហរ៉ិចទ័ររងពីរនៃ $\mathbb{R}^4$ បង្កររៀងគ្នាដោយដោយ $\{v_1, v_2\}$ និង $\{w_1, w_2\}$ ដែល $v_1 = (1, -1, 0, 2), v_2 = (2, 1, 3, 1), w_1 = (1, 1, 1, 1), w_2 = (3, -4, 4, 2)$ ។ កំណត់គោលមួយនៃ $F \cap G$ ។

វ៉ិចទ័រ v មួយនៃ F មានទំរង់ $v = \lambda v_1 + \mu v_2$ និង វ៉ិចទ័រ w មួយនៃ G មានទំរង់ $w = \alpha w_1 + 3\beta w_2$ ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវរក $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ដែល

$$\lambda v_1 + \mu v_2 = \alpha w_1 + \beta w_2$$

មានន័យថា

$$(\lambda - 2\mu, -\lambda + \mu, 3\mu, 2\lambda + \mu) = (\alpha + 3\beta, \alpha - 4\beta, \alpha + 4\beta, \alpha + 2\beta) \tag{2.7}$$

ដូច្នេះ យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = \alpha + 3\beta \\ -\lambda + \mu = \alpha - 4\beta \\ 3\mu = \alpha + 4\beta \\ 2\lambda + \mu = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

ដែលអញ្ញាត្តិរបស់វាជា $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ ។ ដោយយក α និង β ទៅអង្គទីមួយ ប្រព័ន្ធសរសេរ៖

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{cases} \lambda + 2\mu - \alpha - 3\beta = 0 \\ -\lambda + \mu - \alpha + 4\beta = 0 \\ 3\mu - \alpha - 4\beta = 0 \\ 2\lambda + \mu - \alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

ជាបន្ទាប់ យើងអាចសរសេរ

$$\begin{array}{l} L_1^{(1)} = L_1 \\ L_2^{(1)} = L_1 + L_2 \\ L_3^{(1)} = L_3 \\ L_4^{(1)} = L_4 - 2L_1 \end{array} \begin{cases} \lambda + 2\mu - \alpha - 3\beta = 0 \\ 3\mu - 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\mu - \alpha - 4\beta = 0 \\ -3\mu + \alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

និង ជាចុងក្រោយ

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu - \alpha - 3\beta = 0 \\ 3\mu - 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - 5\beta = 0 \end{cases}$$

λ, μ, α ជាអញ្ញាត្តិចំបង និង β ជាអញ្ញាត្តិសេរី។
គេរកឃើញយ៉ាងងាយជាអនុគមន៍នៃ β អញ្ញាត្តិ $\alpha = 5\beta, \mu = 3\beta, \lambda = \beta$ ។
ដូច្នេះ $F \cap G$ ត្រូវបានំណត់ដោយវ៉ិចទ័រមួយនៃវ៉ិចទ័រនៃអង្គទាំងពីរនៃ 2.7 ដែល λ, μ, α ជាអនុគមន៍នៃ β ។ យើងរកឃើញ $(8\beta, \beta, 9\beta, 7\beta)$ មានន័យថា $F \cap G$ ត្រូវបានបង្ករដោយវ៉ិចទ័រ $(8, 1, 9, 7)$ ។

2.3.6 ការកំណត់សមីការនៃលំហវ៉ិចទ័ររងមួយ

ចំណោទមានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖ គេអោយគ្រួសារមួយនៃវ៉ិចទ័រ $\mathcal{F} = \{v_1, \cdots, v_p\}$ និង F ជាលំហវ៉ិចទ័របង្ករ។ គោលបំណងគឺកំណត់ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរមួយដែលចំលើយរបស់វាពិតជាវ៉ិចទ័រនៃ F ។

ឧទាហរណ៍ 2.13. កំណត់សមីការនៃលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathbb{R}^5$ បង្ករដោយវ៉ិចទ័រ $v_1 = (1, 3, -2, 2, 3)$, $v_2 = (1, 4, -3, 4, 2)$, $v_3 = (2, 3, -1, -2, 9)$ ។

សមីការមួយនៃប្រព័ន្ធមានទំរង់៖

$$ax_1 + bx_2 + vx_3 + dx_4 + ex_5 = 0$$

ដោយប្រកុំប៉ូសង់នៃ v_1, v_2, v_3 យើងបាន៖

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a & + & 3b & - & 2c & + & 2d & + & 3e & = & 0 \\ a & + & 4b & - & 3c & + & 4d & + & 2e & = & 0 \\ 2a & + & 3b & - & c & - & 2d & + & 9e & = & 9 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} L_1^{(1)} = L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 - L_1 \\ L_3^{(1)} = L_3 - 2L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a & + & 3b & - & 2c & + & 2d & + & 3e & = & 0 \\ & & b & - & c & + & 2d & - & e & = & 0 \\ & & -3b & + & 3c & - & 6d & + & 3e & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a & + & 3b & - & 2c & + & 2d & + & 3e & = & 0 \\ & & b & - & c & + & 2d & - & e & = & 0 \\ & & & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

ដោយអោយទៅនឹងត្រីធាតុនៃអថេរសេរី (c, d, e) តំលៃ $(1,0,0), (0,1,0)$ និង $(0,0,1)$ គេបានប្រពន្ធសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែន

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 0 \\ -6x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

2.4 ការប្រើប្រាស់ជាក់ស្តែងនៃវិធីសាស្រ្តនៃធាតុវិល

ទ្រឹស្តីបទ 2.2 (ប្រមាណវិធីងាយៗលើគ្រួសារមួយនៃវ៉ិចទ័រ). $v_1, \cdots, v_p$ ជាគ្រួសារមួយនៃវ៉ិចទ័រ។ លំហដែលវ៉ិចទ័របង្ករ មិនប្រែប្រួលទេ បើគេធ្វើលើវ៉ិចទ័រនៃគ្រួសារមួយ ប្រមាណវិធីមួយនៃប្រមាណវិធីខាងក្រោម៖

1. ប្តូរលំដាប់នៃវ៉ិចទ័រ
2. គុណវ៉ិចទ័រមួយដោយស្កាលែរមួយមិនសូន្យ
3. បន្ថែមទៅនឹងវ៉ិចទ័រមួយ នូវបន្សំលីនេអ៊ែរនៃវ៉ិចទ័រផ្សេងទៀត។

សំរាយបញ្ជាក់

1. ឧបមាថា $E = [v_1, \cdots, v_p]$ និង យក $x \in E$ ។ ដូច្នេះ គេអាចសរសេរ៖

$$x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_p v_p$$

ដែលគេក៏អាចសរសេរ៖

$$x = \lambda_i v_i + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_p v_p$$

ដូច្នេះ គេបាន $E = [v_i, v_1, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_p]$ ។

2. តាមលក្ខណៈ 1 នៃទ្រឹស្តីបទ 2.2 យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថាបើ $E = [v_1, \cdots, v_p]$ និង $F = [kv_1, v_2, \cdots, v_p]$ ជាមួយនឹង $k \neq 0$ គេបាន $E = F$ ។
   យក $y \in F$ ដូច្នេះគេអាចសរសេរ $y = \mu_1(kv_1) + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_p v_p$ មានន័យថា $y = (\mu_1 k)v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_p v_p$ ។ ដូច្នេះ $y \in E$ ។
   ប្រាសមកវិញ បើ $y \in E$ គេក៏អាចសរសេរ $y = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$ ។
   ដូច្នេះ $y = \frac{\lambda_1}{k}(kv_1) + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p$ មានន័យថា $y \in F$ ។
3. តាមលក្ខណៈ 1 និង 2 នៃទ្រឹស្តីបទ 2.2 យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថាបើគេបន្ថែមទៅនឹង v_1 នូវវ៉ិចទ័រ v_2 នោះលំហវ៉ិចទ័របង្ករមិនប្រែប្រួលទេ *i.e.* $[v_1, v_2, \cdots, v_p] = [v_1 + v_2, v_2, \cdots, v_p]$ ។
   យើងយក $y \in [v_1 + v_2, v_2, \cdots, v_p]$ គេអាចសរសេរ $y = \mu_1(v_1 + v_2) + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_p v_p$ ។
   ដូច្នេះ $y = \mu_1 v_1 + (\mu_2 + \mu_1)v_2 + \cdots + \mu_p v_p$ *i.e.* $y \in [v_1, v_2, \cdots, v_p]$ ។
   ប្រាសមកវិញ យក $y \in [v_1, \cdots, v_p]$ គេសរសេរ $y = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$ ។ គេអាចនិយាយបានថា
   $$y = \lambda_1(v_1 + v_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \lambda_3 v_3 + \cdots + \lambda_p v_p$$
   ដូច្នេះ $y \in [v_1 + v_2, v_2, \cdots, v_p]$ ។

E ជាលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់ និង $\{e_1, \cdots, e_n\}$ ជាគោលមួយនៃ E ។ យើងបានដឹងហើយថាជំពូក 1 ក្នុងវគ្គ 1.3 គ្រប់វ៉ិចទ័រ $v \in E$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ n-ធាតុមួយនៃ $\mathbb{K}$ (កុំប៉ូសង់របស់វាក្នុងគោល $\{e_1, \cdots, e_n\}$) ។

និយមន័យ 2.3. $\{v_1, \cdots, v_p\}$ ជាគ្រួសារមួយនៃវ៉ិចទ័រនៃ E ។ គេហៅថាម៉ាទ្រីសបង្ករដោយវ៉ិចទ័រ v_i ក្នុងគោល $\{e_1, \cdots, e_n\}$ រឺ យ៉ាងងាយ ម៉ាទ្រីសនៃវ៉ិចទ័រ v_i ជាម៉ាទ្រីសដែលជួរដេករបស់វាជាកុំប៉ូសង់នៃវ៉ិចទ័រ $v_1, \cdots, v_p$ ក្នុងគោល $\{e_1, \cdots, e_n\}$ ។

ជាការពិណាស់ដែលប្រមាណវិធីងាយៗនៃទ្រឹស្តីបទ 2.2 ទាក់ទងទៅនឹងប្រមាណវិធីងាយៗលើជួរដេកនៃម៉ាទ្រីសបង្ករ (ប្តូរជួរដេករវាងគ្នា គុណជួរដេកមួយដោយស្កាលែមួយមិនសូន្យ បូកទៅនឹងជួរដេកមួយនូវបន្សំលីនេអ៊ែរមួយនៃជួរដេកផ្សេងទៀត)។
ដូចយើងបានឃើញហើយថា ជានិច្ចកាល គេអាចធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗលើជួរដេកមួយដើម្បីសរសេរក្រោមទំរង់ជាថ្នាក់។ ដូច្នេះ ពីទ្រឹស្តីបទ 2.2 យើងបាន៖

វិបាក 2.1. វ៉ិចទ័រជួរដេកនៃម៉ាទ្រីសមួយ និង ម៉ាទ្រីសបង្រួមជាថ្នាក់របស់វាបង្ករលំហវ៉ិចទ័រដូចគ្នា។

ទ្រឹស្តីបទ 2.3. $\{v_1, \cdots, v_p\}$ ជាគ្រួសារមួយនៃវ៉ិចទ័រ ហើយ A ជាម៉ាទ្រីសបង្ករ (ក្នុងគោលណាមួយ) និង A' ជាម៉ាទ្រីសបង្រួមជាថ្នាក់មួយនៃ A ។
វ៉ិចទ័រជួរដេកដែលមិនសូន្យនៃ A' បង្កើតបានជាគោលមួយនៃ A ។

សំរាយបញ្ជាក់
យើងសំគាស់ជាដំបូងថាតាមវិបាក 2.1 ជួរដេកមិនសូន្យនៃ A' បង្កើតបានជាគ្រួសារបង្ករមួយនៃ $[v_1, \cdots, v_p]$ ។ ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថាវាបង្កើតបានប្រព័ន្ធសេរីមួយ។ សំណៅនៃសំរាយបញ្ជាក់វែងជាងការយ់។ ដូច្នេះ យើងនឹងផ្ទាត់ក្នុងករណីពិសេសមួយ។
យក

$$A' = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{bmatrix} 4 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & 2 & c' & d' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$

យើងផ្ទៀងផ្ទាត់ $\{v_1, v_2, v_3\}$ ជាគ្រួសារសេរី *i.e.* បើ $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$ គេនឹងបាន $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ។
ដូច្នេះ យើងបានប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} 4x_1 & & & = 0 \\ ax_1 & & & = 0 \\ bx_1 & + 2x_2 & & = 0 \\ cx_1 & + c'x_2 & & = 0 \\ dx_1 & + d'x_2 & - x_3 & = 0 \end{cases}$$

សមីការទីមួយផ្តល់ $x_1 = 0$ ។ ដោយជំនួសតំលៃនេះក្នុងសមីការទីបី គេបាន $x_2 = 0$ និង ដោយជំនួសតំលៃទាំងពីរដែលបានរកឃើញក្នុងសមីការទីប្រាំ គេបាន $x_3 = 0$ ។
វាមានភាពងាយស្រួលក្នុងការបកស្រាយក្នុយងករណីទូទៅ គេបានប្រព័ន្ធជាថ្នាក់មួយដែលអោយជាបន្តបន្ទាប់ $x_1 = 0$ រួច $x_2 = 0$ រហូតដល់ $x_p = 0$ ។

2.4.1 ការទាញនៃគោលមួយពីគ្រួសារបង្ករមួយ និង ការកំណត់ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែរនៃវ៉ិចទ័រ

ឧទាហរណ៍ 2.14. កំណត់គោលមួយនៃលំហរងនៃ $\mathbb{R}^4$ បង្ករដោយវ៉ិទ័រ $v_1 = (1, 1, 0, -1), v_2 = (-1, 1, 1, 0), v_3 = (0, 2, 1, -1)$ និងកំណត់ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែរ។

យើងបាន ម៉ាទ្រីសបង្ករះ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

ដោយធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗតាមជួរដេក យើងបានម៉ាទ្រីសះ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1^{(1)} = v_1 \\ v_2^{(1)} = v_1 + v_2 \\ v_3^{(1)} = v_3 \end{array}$$

ជាបន្ទាប់

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1^{(2)} = v_1^{(1)} \\ v_2^{(2)} = v_2^{(1)} \\ v_3^{(2)} = v_2^{(1)} - v_3^{(1)} \end{array}$$

ដូច្នេះ $v_1^{(2)} = (1, 1, 0, -1)$ និង $v_2^{(2)} = (0, 2, 1, -1)$ បង្កើតបានគោលមួយនៃ $[v_1, v_2, v_3]$ ។ លើសពីនេះ $v_3^{(2)} = 0$ មានន័យថា $v_2^{(1)} - v_3 = 0$ រឺ $v_2 + v_2 - v_3 = 0$ ដែលសមីការចុងក្រោយនេះ បញ្ជាក់ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែរនៃ $\{v_1, v_2, v_3\}$ ។

ឧទាហរណ៍ 2.15. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $v_1 = (1,2,-1,0,1), v_2 = (2,1,1,1,1), v_3 = (3,2,0,1,2)$ ជាគ្រួសារសេរីមួយនៃ $\mathbb{R}^5$ ។
កំណត់ពីរវ៉ិចទ័រ w_1, w_2 នៃ $\mathbb{R}^5$ ដើម្បីអោយ $\{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\}$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}^5$ ។

យើងបានម៉ាទ្រីសបង្គរ៖

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

ដូចឧទាហរណ៍ 2.14 ដោយធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗតាមជួរដេកដើម្បីបាន

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1^{(1)} = v_1 \\ v_2^{(1)} = v_2 - 2v_1 \\ v_3^{(1)} = v_3 - 3v_1 \end{array}$$

រួច

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1^{(2)} = v_1^{(1)} \\ v_2^{(2)} = v_2^{(1)} \\ v_3^{(2)} = 3v_3^{(1)} - 4v_2^{(1)} \end{array}$$

ដោយសារតែ គេមិនទទួលបានវ៉ិចទ័រជួរដេកសូន្យក្នុងម៉ាទ្រីសជាថ្នាក់ នោះវិមាត្រនៃលំហ F បង្កើតដោយ v_1, v_2, v_3 មានវិមាត្រ 3 ហើយដូច្នេះ $\{v_1, v_2, v_3\}$ ជាគ្រួសារសេរីមួយនៃ F ព្រោះវាជាគោលមួយនៃ F ។
យើងក៏កត់សំគាល់ថា $\{v_1, v_2^{(1)}, v_3^{(2)}\}$ ក៏ជាគោលមួយនៃ F ដែរ។
យើងអោយម៉ាទ្រីស

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \\ w_1 \\ w_2 \end{array}$$

ម៉ាទ្រីសនេះជាម៉ាទ្រីសជាថ្នាក់។ ដូច្នេះ $\{v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, v_3^{(2)}, w_1, w_2\}$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}^5$ ។ តាមសំណើ 1.14 គេបាន $\{w_1, w_2\}$ ជាគោលមួយនៃលំហ G លំហបន្ថែមនៃ F *i.e.* $\mathbb{R}^5 = F \oplus G$ ។
ដូច្នេះ $\mathcal{B} = \{\underbrace{v_1, v_2, v_3,}_{\text{គោលនៃ } F} \underbrace{w_1, w_2}_{\text{គោលនៃ } G}\}$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}^5$ ។

2.4.2 **ការកំណត់គោលមួយនៃ** $F + G$

បើ $\mathcal{B}_1$ និង $\mathcal{B}_2$ ជាគ្រួសារបង្គរនៃ F និង G រៀងគ្នា នោះ $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ ជាគ្រួសារបង្កករ $F + G$ ។

ឧទាហរណ៍ 2.16. គេយក $F = [v_1, v_2, v_3]$ ដែល $v_1 = (1,-1,0,2)$, $v_2 = (2,1,3,1)$, $v_3 = (4,5,9,-1)$ និង $G = [w_1, w_2]$ ដែល $w_1 = (1,1,1,1)$, $w_2 = (3,-4,4,2)$ កំណត់គោលមួយនៃ $F + G$ ។

យើងបាន $F + G = [v_1, v_2, v_3, w_1, w_2]$ ។ ការអនុវត្តន៍ជាក់ស្តែង គេចាប់ផ្តើមដោយទាញយកគោលមួយនៃ F និង គោលមួយនៃ G ។

គោលនៃ F ៖

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 9 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

តាមប្រមាណវិធីងាយៗនៃជួរដេក គេបាន៖

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & 9 & -9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1^{(1)} = v_1 \\ v_2^{(1)} = v_2 - 2v_1 \\ v_3^{(1)} = v_3 - 4v_1 \end{array}$$

រួច

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1^{(2)} = v_1^{(1)} \\ v_2^{(2)} = \frac{1}{3}v_2^{(1)} \\ v_3^{(2)} = v_3^{(1)} - 3v_2^{(1)} \end{array}$$

ដូច្នេះ $\mathcal{B}_1 = \{v_1^{(2)}, v_2^{(2)}\}$ ជាគោលមួយនៃ F ។

គោលនៃ G ៖
ជាការពិតណាស់ w_1 និង w_2 បង្កើតបានជាគ្រួសារសេរី។ ដូច្នេះ $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2\}$ ជាគោលមួយនៃ G ។
ដូច្នេះ $F + G = [v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, w_1, w_2]$ ។

គោលនៃ $F + G$ ៖

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ w_1 \\ w_2 \end{array}$$

តាមរបៀបដដែល គេបាន៖

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1^{(3)} = v_1^{(2)} \\ v_2^{(3)} = v_2^{(2)} \\ w_1^{(1)} = w_1 - v_1^{(2)} \\ w_2^{(1)} = w_2 - 3v_1^{(2)} \end{array}$$

និង ជាបន្ទាប់៖

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1^{(4)} = v_1^{(3)} \\ v_2^{(4)} = v_2^{(3)} \\ w_1^{(2)} = w_1^{(1)} - 2v_2^{(3)} \\ w_2^{(2)} = w_2^{(1)} + v_2^{(3)} \end{array}$$

ហើយជាចុងក្រោយ៖

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1^{(5)} = v_1^{(4)} \\ v_2^{(5)} = v_2^{(4)} \\ w_1^{(3)} = w_1^{(2)} \\ w_2^{(3)} = w_2^{(2)} + 5w_1^{(2)} \end{array}$$

ដូច្នេះ គោលមួយនៃ $F+G$ អោយដោយវ៉ិចទ័រ $(1,-1,0,2),(0,1,1,-1),(0,0,-1,1)$ ។

2.4.3 ការកំណត់គោលមួយនៃ $F \cap G$

ឧទាហរណ៍ 2.17. កំណត់គោលមួយនៃ $F\cap G$ ដែល គេយក $F=[v_1,v_2,v_3]$ ដែល F និង G ជាលំហវ៉ិចទ័រនៃឧទាហរណ៍ 2.16 ។

យើងទើបតែឃើញហើយថា $\dim F+G=3$ ។
ដូច្នេះ $\dim(F\cap G)=\dim F+\dim G-\dim(F+G)=2+2-3=1$ ។
ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែកំណត់វ៉ិចទ័រមួយមិនសូន្យនៃ $F\cap G$ ។
ដូចយើងបានឃើញខាងលើហើយថានៅក្នុងម៉ាទ្រីសថ្នាក់ចុងក្រោយ វ៉ិចទ័រ $w_2^{(3)}$ ស្មើនឹងសូន្យ។ ដូច្នេះដោយបញ្ជាក់ $w_1^{(1)}$ និង $w_2^{(1)}$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រនៃ F និង នៃ G គេបាន

$$w_2-3v_1+v_2^{(2)}+5(w_1-v_1-v_2^{(2)})=0$$

ដូច្នេះ

$$\underbrace{2v_1-9v_2^{(2)}}_{F}=\underbrace{5w_1+w_2}_{G}$$

ដោយតាង $z=2v_1-9v_2^{(2)}=5w_1+w_2$ យើងបាន $z\in F$ និង $z\in G$ *i.e.* $z\in F\cap G$ ។ ដូច្នេះ $z=5w_1+w_2=(8,1,9,7)$ ជាគោលមួយនៃ $F\cap G$ ។

2.4.4 ការកំណត់សមីការនៃលំហរងមួយ

វិធីសាស្ត្រត្រូវបានបង្កើតលើលក្ខណៈខាងក្រោម៖

សំណើ 2.1. យក $F=[v_1,\cdots,v_p]$ នោះ $x\in F$ លុះត្រាតែ $[x,v_1,\cdots,v_p]=F$ ។

សំរាយបញ្ជាក់
បើ $x\in F$ នោះ $\{x,v_1,\cdots,v_p\}$ បង្ករ F ជាគ្រួសារបង្ករមួយ។
ច្រាសមកវិញ ឧបមាថា $[x,\vec{V}_1,\cdots,v_p]=[v_1,\cdots,v_p]$ ។ ដោយសារតែ $x\in[x,v_1,\cdots,v_p]$ គេបាន $x\in[v_1,\cdots,v_p]=F$ ។
ដើម្បីកំណត់សមីការដែលបញ្ជាក់ F គេកំណត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌថាម៉ាទ្រីសបង្កររៀងគ្នាដោយ $[v_1,\cdots,v_p]$ និងដោយ $[v_1,\cdots,v_p,x]$ មានម៉ាទ្រីសថ្នាក់ដូចគ្នា និង ដូច្នេះអោយលំហរងពីរត្រួតស៊ីគ្នា។

ឧទាហរណ៍ 2.18. កំណត់សមីការនៃលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathbb{R}^5$ បង្ករដោយវ៉ិចទ័រ $v_1 = (1,3,-2,2,3), v_2 = (1,4,-3,4,2), v_3 = (2,3,-1,-2,9)$ ។

យើងបាន ម៉ាទ្រីសបង្ករ៖

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ x \end{array} \end{array}$$

ដោយធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗតាមជួរដេក គេបានម៉ាទ្រីស

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & -3x_1+x_2 & 2x_1+x_3 & -2x_1+x_4 & -3x_1+x_5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} v_1^{(1)} = v_1 \\ v_2^{(1)} = v_2 - v_1 \\ v_3^{(1)} = v_3 - 2v_1 \\ x^{(1)} = x - x_1 v_1 \end{array} \end{array}$$

រួច

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1+x_2+x_3 & 4x_1-2x_2+x_4 & -6x_1+x_2+x_5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} v_1^{(2)} = v_1^{(1)} \\ v_2^{(2)} = v_2^{(1)} \\ v_3^{(2)} = v_3^{(1)} + 3v_2^{(1)} \\ x^{(2)} = x^{(1)} - (-3x_1+x_2)v_2^{(1)} \end{array} \end{array}$$

ដូច្នេះ សមីការនៃ F ត្រូវបានទទួលដោយធ្វើអោយវ៉ិចទ័រជួរដេកចុងក្រោយស្មើនឹងសូន្យ *i.e.*

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ -6x_1 + x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

លំហាត់

លំហាត់ 2.1. គេអោយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \end{array}\right.$$

ដែលបំណកស្រាយតាមវ៉ិចទ័ររបស់វាជាសមីការ

$$x\vec{A}+y\vec{B}=\vec{C}$$

ដែល $\vec{A}=(a,a')$, $\vec{B}=(b,b')$ និង $\vec{C}=(c,c')$ ។
គេកំណត់ $\vec{A}\wedge\vec{B}$ ជាផលគុណវ៉ិចទ័រនៃ $\vec{A}$ ដោយ $\vec{B}$ ក្នុង $\mathbb{R}^2$ *i.e.* $\vec{A}\wedge\vec{B}=\det(\vec{A},\vec{B})$។

1. ករណី១៖ $\vec{A}\wedge\vec{B}\neq\vec{0}$ បង្ហាញថា

$$x=\frac{\det(\vec{C},\vec{B})}{\det(\vec{A},\vec{B})} \text{ និង } x=\frac{\det(\vec{A},\vec{C})}{\det(\vec{A},\vec{B})}$$

2. ករណី២៖ $\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0}$ ជាមួយនឹង $\vec{A}\neq\vec{0}$ ។ ពិភាក្សាសមីការដោយសិក្សា $\vec{A}\wedge\vec{B}$ ។

3. ករណី៣៖ $\vec{A}=\vec{B}=\vec{0}$ ។ ពិភាក្សាសមីការ។

លំហាត់ 2.2. គេអោយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & cz & = & d \\ a'x & + & b'y & + & c'z & = & d' \\ a''x & + & b''y & + & c''z & = & d'' \end{array}\right.$$

ដែលបំណកស្រាយតាមវ៉ិចទ័ររបស់វាជាសមីការ

$$x\vec{A}+y\vec{B}+z\vec{C}=\vec{D}$$

ដែល $\vec{A}=(a,a',a'')$, $\vec{B}=(b,b',b'')$, $\vec{C}=(c,c',c'')$ និង $\vec{D}=(d,d',d'')$ ។
គេកំណត់ $[\vec{A}\wedge\vec{B},\vec{D}]$ ជាផលគុណចំរុះនៃបីវ៉ិចទ័រនៃ $\vec{A}$, $\vec{B}$ និង $\vec{C}$ ក្នុង $\mathbb{R}^3$ *i.e.* $[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]=\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$ ។

1. បើ $[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]\neq 0$ បង្ហាញថា

$$x=\frac{\det(\vec{D},\vec{B},\vec{C})}{\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})}, y=\frac{\det(\vec{D},\vec{C},\vec{A})}{\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})} \text{ និង } z=\frac{\det(\vec{D},\vec{A},\vec{B})}{\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})}$$

2. សិក្សាករណី $[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]=0$ ។

លំហាត់ 2.3. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ ប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

1. $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 5 \\ 3x & - & 2y & = & 1 \end{array}\right.$

2. $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x + 7y = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x + 7y = 5 \\ 8x - y = 3 \\ 4x + 2y = 11 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x - 6y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 4x - 3y = 5 \\ 5x - 5y = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ -3x + 5y = 1 \\ 7x - 11y = -1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

លំហាត់ 2.4. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ ប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

1. $\begin{cases} x + 4y + z = 6 \\ -2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 4y + z = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ -x + y - z = 1 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ 4x - 2y + 3z = 12 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x - 2y + 5z = 7 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + 7y - 3z = 8 \\ -x + 3y + z = -4 \\ 3x - 2y + 4z = 5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x - 2y + 4z = 5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y - 8z = -1 \\ x - 3y + 4z = -5 \\ -3x + y + 12z = 8 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 14 \\ 2x + 5y + 4z = 17 \\ 6x + 4y + 6z = 29 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x - y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 7z = 14 \\ x + 3y - 3z = -4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x - y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 7z = 14 \\ x + 3y - 3z = -4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - y + z - t = -2 \\ 2x - 3y + z + t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \\ -x - 8y + 3z + 2t = -5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 3x - 3y + 3z + 2t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 5x - 5y + 5z + 7t = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} & & y & + & 3z & + & 2t & = & 6 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & + & 5t & = & 14 \\ 2x & + & 3y & + & 3z & + & 2t & = & 10 \\ 4x & + & 5y & + & 7z & + & 6t & = & 22 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 2 \\ x & + & 4y & + & 9z & + & 16t & = & 3 \\ x & + & 8y & + & 27z & + & 64t & = & 4 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \cdots & + & nx_n & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & \cdots & + & 2x_n & = & 3 \\ \vdots \\ nx_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & \cdots & + & (n-1)x_n & = & n \end{cases}$

លំហាត់ 2.5. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ ប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

1. $\begin{cases} x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & y & = & m \end{cases}$
   ដែល m ជាចំនួនពិត។

2. $\begin{cases} x & + & 2y & = & 2m \\ 2x & + & y & = & 2m-1 \end{cases}$
   ដែល m ជាចំនួនពិត។

3. $\begin{cases} x & - & 2y & = & 1 \\ mx & + & y & = & 1 \end{cases}$
   ដែល m ជាចំនួនពិត។

4. $\begin{cases} mx & + & y & = & 0 \\ x & + & my & = & 1 \end{cases}$
   ដែល m ជាចំនួនពិត។

5. $\begin{cases} x & + & y & = & a \\ 2x & + & 2y & = & b \end{cases}$
   ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។

6. $\begin{cases} x & + & y & = & 3 \\ \alpha x & + & 2y & = & 4 \end{cases}$
   ដែល m ជាចំនួនពិត។

7. $\begin{cases} mx & + & y & = & 2m-1 \\ x & + & my & = & 2m^2-1 \end{cases}$
   ដែល m ជាចំនួនពិត។

8. $\begin{cases} (1-m)x + (m-2)y = 4m-1 \\ (1-2m)x + 2(m-1)y = m-1 \end{cases}$
ដែល m ជាចំនួនពិត។

9. $\begin{cases} -2x + 5y = mx \\ x + 2y = my \end{cases}$
ដែល m ជាចំនួនពិត។

10. $\begin{cases} x + y = m \\ x + my = 1 \\ mx + y = 1 \end{cases}$
ដែល m ជាចំនួនពិត។

11. $\begin{cases} x + y = a \\ 2x + 3y = b \\ 3x - 2y = c \end{cases}$
ដែល a, b និង c ជាចំនួនពិត។

12. $\begin{cases} x + (m+1)y + (m+2)z = 1 \\ mx + (m-1)y + z = 2m \end{cases}$
ដែល m ជាចំនួនពិត។

13. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + 6y + 2z = 5 \\ 7x + 3y + z = \lambda \end{cases}$
ដែល λ ជាចំនួនពិត។

14. $\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$
ដែល m ជាចំនួនពិត។

15. $\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x - y + z = b \\ x + 4y + 2z = c \end{cases}$
ដែល a, b និង c ជាចំនួនពិត។

16. $\begin{cases} x - 2y - 3z = a \\ x - 4y - 13z = b \\ -3x + 5y + 4z = c \end{cases}$
ដែល a, b និង c ជាចំនួនពិត។

17. $\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + 3y + z = b \\ x + 2z = c \end{cases}$
ដែល a, b និង c ជាចំនួនពិត។

18. $\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$
ដែល m ជាចំនួនពិត។

19. $\begin{cases} x + my + 2z = m \\ -2x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + y + 2z = 2m-1 \end{cases}$
ដែល m ជាចំនួនពិត។

20. $\begin{cases} mx + y + mz = 2m \\ x + my + z = 2 \\ mx + y - mz = 0 \end{cases}$
ដែល m ជាចំនួនពិត។

21. $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$
ដែល λ ជាចំនួនពិត។

22. $\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = \lambda \\ x + y + \lambda z + t = \lambda + 1 \end{cases}$
ដែល λ ជាចំនួនពិត។

23. $\begin{cases} x + y + z + \lambda t = 1 \\ x + y + \lambda z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = 1 \\ \lambda x + y + z + t = 1 \end{cases}$
ដែល λ ជាចំនួនពិត។

24. $\begin{cases} 3x + 4y + 4z + 3mt = 3m+1 \\ x + 2y + 3z + mt = m+2 \\ x + y + z + mt = m+1 \\ x + y + 2z + (2m-1)t = m^2+m+3 \end{cases}$
ដែល m ជាចំនួនពិត។

25. $\begin{cases} ax + ((1-a)y + (1-a)z = a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a))z = a-a^2 \\ x + y + z = 1-a \end{cases}$
ដែល a ជាចំនួនពិត។

26. $\begin{cases} ax + (b-1)y + 2z = 1 \\ ax + (2b-3)y + 3z = 1 \\ ax + (b-1)y + (b+2)z = 1 \end{cases}$
ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។

27. $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$
ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។

28. $\begin{cases} ax - by + t = a \\ bx + ay + z = b \\ y + az - bt = a \\ x + bz + at = b \end{cases}$
ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។

29. $\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0 \\ x + by + b^2z + b^3 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0 \end{cases}$
ដែល a, b និង c ជាចំនួនពិត។

លំហាត់ 2.6 (សមីការមិនលីនេអ៊ែរ). ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ ប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

1. $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} + \frac{5}{z} = -10 \\ \frac{2}{x} - \frac{4}{y} + \frac{3}{z} = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2e^x - 3e^y + 5e^z = 19 \\ 6e^x + e^y - 2e^z = -4 \\ 10e^x + 2e^y - e^z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 8\ln x + \ln y - \ln z = 3 \\ 6\ln x + 2\ln y + \ln z = 0 \\ 4\ln x + 3\ln z = -2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases}$
ដែល x, y និង z ជាចំនួនវិជ្ជមានដាច់ខាត។

លំហាត់ 2.7. បំលែម៉ាទ្រីសខាងក្រោមជាម៉ាទ្រីសជាថ្នាក់៖

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & m \\ -m & 1 & m \\ 1 & -m & -1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$

លំហាត់ 2.8. បង្ហាញថាប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 3y & + & az & = & b \\ 5x & - & 7y & + & cz & = & d \end{array}\right.$ ជានិច្ចកាលមានចំលើយមួយចំពោះគ្រប់តំលៃនៃ a, b, c និង d ។

លំហាត់ 2.9. គេអោយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរមានបីសមីការ និង ពីរអញ្ញាតុតិ x និង y៖

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 4 \\ 6x & + & 42y & = & 7 \\ x & + & 2y & = & m \end{array}\right.$$

ដែល m ជាចំនួនដែលអោយមួយ។
កំណត់តំលៃ m ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធមានចំលើយមួយយ៉ាងតិច។

លំហាត់ 2.10. កំណត់តំលៃ p ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} px & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & (1+p)y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & (2+p)z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

មានចំលើយផ្សេងទៀតក្រៅពី $(0,0,0,0)$ ។

លំហាត់ 2.11. a, b និង c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC មួយឈមនឹងមុំ A , B និង C រៀងគ្នា។

1. បង្ហាញទំនាក់ទំនង
$$a = b\cos C + c\cos B$$
រួច រកទំនាក់ទំនងស្រដៀងគ្នាពីរទៀត។
2. សរសេរប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរដែល $\cos A$, $\cos B$ និង $\cos C$ ជាចំលើយ រួចដោះស្រាយវា។
3. ទាញថា
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
រួចសរសេរទំនាក់ទំនងស្រដៀងគ្នាពីរទៀត។

លំហាត់ 2.12. ក្នុង $\mathbb{R}^3$ គេអោយវិចទ័រ $u = (1,3,5), v = (1,-2,-3)$ និង $w = (-1,1,-1)$ ។ តើវិទ័រ $x = (2,3,1)$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ u, v និង w រឺទេ ?

លំហាត់ 2.13. ក្នុង $\mathbb{R}^2$ គេអោយវិចទ័រ $u = (2m,3)$ និង $v = (2,m)$ ។

1. កំនត់តំលៃ m ដើម្បីអោយវិចទ័រ $x = (2,-1)$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរមួយនៃ u និង v ។

2. កំនត់តំលៃ m ដើម្បីអោយវិចទ័រ $\{u, v\}$ ជាគ្រួសារបង្កមួយនៃ $\mathbb{R}^2$ ។

លំហាត់ 2.14. ក្នុង $\mathbb{R}^3$ គេអោយវិចទ័រ $v_1 = (-1, 1, 2)$, $v_2 = (1, 2, 5)$, $v_3 = (3, 1, a)$ និង $v_4 = (2, 1, b)$ ។ រក a និង b ដើម្បីអោយគ្រួសារនៃវិចទ័រ $\{v_1, v_2\}$ បង្កបានលំហវិចទ័ររង ដូចគ្រួសារនៃវិចទ័រ $\{v_3, v_4\}$ ។

លំហាត់ 2.15. ក្នុង $\mathbb{R}^4$ គេយក៖

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_1 + x_2 = 0 \text{ និង } x_3 + x_4 = 0$$

និង

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_1 + x_4 = 0 \text{ និង } x_2 + x_3 = 0$$

1. កំណត់គោលមួយនៃ F និង G រួចគោលមួយនៃ $F \cap G$ ។
2. កំណត់គោលមួយនៃ $F + G$ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$ ។
3. កំណត់សមីការនៃ $F + G$ ។

លំហាត់ 2.16. ក្នុង $\mathbb{R}^4$ តើវិចទ័រខាងក្រោម អាស្រ័យលីនេអ៊ែរ រឺ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ? ក្នុងករណីអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ រកទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែរ។

1. $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1, -1)$, $v_3 = (1, -1, -1, 1)$, $v_4 = (1, 1, -1, -1)$
2. $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, -1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -1, -1)$, $v_4 = (-1, -1, 1, 1)$
3. $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (2, 3, 4, 1)$, $v_3 = (3, 4, 1, 2)$, $v_4 = (4, 1, 2, 3)$
4. $v_1 = (1, 2, 1, 2)$, $v_2 = (2, 1, 2, 1)$, $v_3 = (1, 1, 2, 2)$, $v_4 = (4, 4, 5, 5)$
5. $v_1 = (1, -2, 3, -1)$, $v_2 = (-1, -1, 6, 1)$, $v_3 = (-3, 1, 3, 1)$, $v_4 = (1, 0, -1, 1)$
6. $v_1 = (-1, -1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2, 3)$, $v_3 = (0, 1, 1, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1)$

លំហាត់ 2.17. ក្នុង $\mathbb{R}^5$ គេអោយវិចទ័រ៖ $v_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1, 1, 1)$ និង $v_2 = (1, -1, 1, -1, 1)$ ។ គេយក $F = [v_1, v_2, v_3]$ ។

1. បង្ហាញថា $v = (6, 0, 2, 0, 6)$ ជាធាតុនៃ F ។
2. តើ $w = (1, -1, 1, -1, -1)$ ជាធាតុនៃ F រឺទេ?

លំហាត់ 2.18. បង្ហាញថាវិចទ័រខាងក្រោមបង្កបាន $\mathbb{R}^4$ ៖

1. $v_1 = (-1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, -1, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1, -1)$
2. $v_1 = (1, 1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 1, -1, -1)$, $v_3 = (1, -1, -1, -1)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1)$
3. $v_1 = (0, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1, 0)$
4. $v_1 = (1, 0, 1, 2)$, $v_2 = (1, 1, 0, 3)$, $v_3 = (1, 2, 1, 0)$, $v_4 = (1, 3, 3, 1)$

លំហាត់ 2.19. បង្ហាញថាម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ និង $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ បង្កើតបានគោលមួយនៃលំហវិទ័រ $S_2(\mathbb{R})$ នៃម៉ាទ្រីសការេឆ្លុះ។
ចូរបំបែកនៅលើគោលនេះ ម៉ាទ្រីស $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ។

ជំពូក 3

អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ និង ម៉ាទ្រីស

3.1 អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ

និយមន័យ និង កំណត់សរសេរ 3.1. E និង E' ជាលំហវិុចទ័រពីរ [1] លើកាយ $\mathbb{K}$ តែមួយ និង f ជាអនុវត្តន៍ពី E ទៅក្នុង E' ។ គេថា f ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ បើវាផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $v, w \in E$ និងចំពោះគ្រប់ $\lambda \in \mathbb{K}$ ទំនាក់ទំនងទាំងពីរខាងក្រោម៖

1. $f(v + w) = f(v) + f(w)$
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

តាមសមមូល ទំនាក់ទំនងទាំងពីរនេះ បង្រួមមក

$$f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w) \tag{3.1}$$

សំណុំនៃអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរពី E ទៅក្នុង E' កំណត់សរសេរដោយ $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E')$ រឺយ៉ាងងាយ $\mathcal{L}(E, E')$ ។

ចំណាំ 3.1. បើ f ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ គេបាន $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ។
ដោយហេតុថា ចំពោះគ្រប់ $v \in E$ និងចំពោះគ្រប់ $\lambda \in \mathbb{K}$ គេបាន $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ ។ ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែយក $\lambda = 0$ ដើម្បីទទួលបាន $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ។

និយមន័យ និង កំណត់សរសេរ 3.2. E និង E' ជាលំហវិុចទ័រពីរលើកាយ $\mathbb{K}$ តែមួយ។ គេហៅថាអង់ដូមរភីសនៃ E ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរពី E ទៅក្នុង E (សំណុំដើម និង សំណុំចុងដូចគ្នា) ។ សំណុំនៃអង់ដូមរភីសនៃ E កំណត់សរសេរដោយ $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ រឺយ៉ាងងាយ $\mathrm{End}(E)$[2] ។
គេហៅថាអ៊ីសូមរភីសពី E ទៅក្នុង E' គឺអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយទល់មួយពី E ទៅក្នុង E' ។ E ជាលំហវិុចទ័រមួយលើកាយ $\mathbb{K}$ ។ គេហៅថាទំរង់លីនេអ៊ែរលើ E ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយពី E ទៅក្នុង $\mathbb{K}$ [3] ។

---

[1]ប្រមាណវិធីបូកក្នុង និង ប្រមាណវិធីគុណក្រៅក្នុង E និង E' ជាទូទៅមិនដូចគ្នាទេ។

[2]ជាញឹកញាប់ គេក៏កំណត់សរសេរផងដែរ $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ រឺយ៉ាងងាយ $\mathcal{L}(E)$

[3]$\mathbb{K}$ ជាលំហវិុចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ខ្លួនវា។

ឧទាហរណ៍ 3.1. E និង E' ជាលំហវ៉ិចទ័រពីរលើកាយ $\mathbb{K}$ តែមួយ។
អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{rccc} f & : & E & \to & E' \\ & & v & \mapsto & \mathbf{0} \end{array}$$

ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ ហៅថាអនុវត្តន៍សូន្យ។

ឧទាហរណ៍ 3.2. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយលើកាយ $\mathbb{K}$ ។
អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E & : & E & \to & E \\ & & v & \mapsto & v \end{array}$$

ជាអង់ដូមរភីសមួយលើ E ហៅថាឯកតា រឺ អនុវត្តន៍ខ្លួនឯង។

ឧទាហរណ៍ 3.3. អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (2x_1 - x_2, x_2 - x_3) \end{array}$$

ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ។

បំណកស្រាយ

យើងយក $v = (x_1, x_2, x_3)$ និង $w = (y_1, y_2, y_3)$ ជាពីរចំណុចនៃ $\mathbb{R}^3$ និង λ ជាចចំនួនពិតមួយ។ យើងបាន

$$\begin{aligned} f(v+w) &= f((x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)) \\ &= (2(x_1+y_1)+(x_2+y_2), (x_2-y_2)-(x_3+y_3)) \\ &= ((2x_1+x_2)+(2y_1+y_2), (x_2-x_3)+(y_2-y_3)) \\ &= f(v)+f(w) \end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned} f(\lambda v) &= f((\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)) \\ &= f((2\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda x_1 - \lambda x_3)) \\ &= f(\lambda(2x_1 + x_3, x_2 - x_3)) \\ &= \lambda f((2x_1 + x_3, x_2 - x_3)) \\ &= \lambda f(v) \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ 3.4. ជាទូទៅ អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & (f_1, \cdots, f_m) \end{array}$$

ដែលចំពោះគ្រប់ $i \in [1, m]$, $f_i(x_1, \cdots, x_n) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ។

ឧទាហរណ៍ 3.5. អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5, x_1 - 2x_2 + x_3) \end{array}$$

មិនមែនជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ។

ឧទាហរណ៍ 3.6. អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & (x_1^2-x_2, x_2+x_3) \end{array}$$

មិនមែនជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ។

ឧទាហរណ៍ 3.7. អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & (2x_1x_2, x_2+3x_1) \end{array}$$

មិនមែនជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ។

ឧទាហរណ៍ 3.8. អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & -x_1+2x_2+5x_3 \end{array}$$

ជាទំរង់លីនេអ៊ែរមួយ។

ឧទាហរណ៍ 3.9. ជាទូទៅ អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ & & (x_1,\cdots,x_n) & \mapsto & a_1x_1+\cdots+a_nx_n \end{array}$$

ជាទំរង់លីនេអ៊ែរមួយ។

ឧទាហរណ៍ 3.10. យក $C^0([a,b])$ និង $C^1([a,b])$ ជាលំហវិចទ័រនៃអនុវត្តន៍ពី $[a,b]$ ទៅក្នុង $\mathbb{R}$ រៀងគ្នា ជាប់ និងមានដេរីវេជាប់។
អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{cccc} D & : & C^1([a,b]) & \to & C^0([a,b]) \\ & & f & \mapsto & f' \end{array}$$

ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ។

បំណាកស្រាយ
យក f និង g ជាពីរធាតុនៃ $C([a,b])$ និង λ ជាចំនួនពិត។ យើងបាន

$$D(f+g) = (f+g)' = f'+g' = Df+Dg$$

និង

$$D(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f'$$

ឧទាហរណ៍ 3.11. គេអោយ $\varphi \in C([a,b])$ ។
អនុវត្តន៍

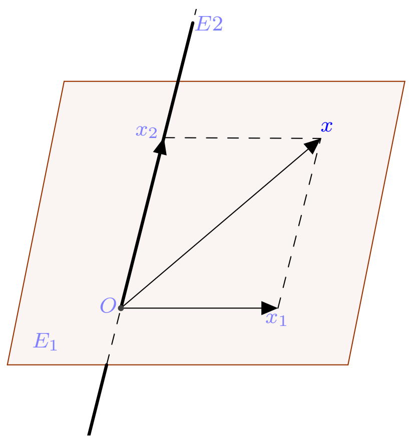
$$\begin{array}{cccc} I & : & C([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & \displaystyle\int_{[a,b]} \varphi(x)f(x)dx \end{array}$$

ជាទំរង់លីនេអ៊ែរមួយ។

ឧទាហរណ៍ 3.12. គេយក $E = E_1 \oplus E_2$ ។ ដូច្នេះគ្រប់ធាតុ $x \in E$ សរសេរបានតែមួយបែបគត់ $x = x_1 + x_2$ ដែល $x_1 \in E_1$ និង $x_2 \in E_2$ ។
អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{pr}_1 & : & E & \to & E_1 \\ & & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \end{array}$$

ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ ហៅថាចំណោលលើ E_1 ស្របនឹង E_2 ។



រូប 3.1:

ឧទាហរណ៍ 3.13. v_0 ជាវ៉ិចទ័រមួយមិនសូន្យនៃ E ។
អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{rcccc} \tau & : & E & \to & E \\ & & v & \mapsto & v + v_0 \end{array}$$

ហៅថាបំលែងកិលតាមវ៉ិចទ័របំលែងកិល v_0 មិនមែនជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរព្រោះ $\tau(\mathbf{0}) = v_0 \neq \mathbf{0}$ ។

3.2 រូបភាព និង ស្នូលនៃគ្រួសារមួយនៃវ៉ិចទ័រ

សំណើ និង និយមន័យ 3.1. E និង E' ជាលំហវ៉ិចទ័រពីរលើកាយ $\mathbb{K}$ តែមួយ។ $f : E \to F$ ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ និង F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E ។ ដូច្នេះ $f(F)$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃ E' ។
ជាពិសេស $F(E)$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃ E' ហៅថារូបភាពនៃ f និងកំណត់សរសេរដោយ $\operatorname{Im} f$ ។ វិមាត្ររបស់វាហៅថារ៉ង់នៃ f និង កំណត់សរសេរដោយ $\operatorname{Rg} f$

$$\operatorname{Rg} f := \dim(\operatorname{Im} f) \tag{3.2}$$

សំរាយបញ្ជាក់

យក $y_1, y_2 \in f(F)$ ។ ដូច្នេះ មាន $x_1, x_2 \in F$ ដែល $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ ។ យើងអាចសសរសេរ

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$$

យើងបាន $y_1 + y_2 \in f(F)$ ។
ដូចគ្នាដែរ យើងយក $y \in f(F)(y = f(x)$ ជាមួយនឹង $x \in F)$ និង $\lambda \in \mathbb{K}$ ។ យើងអាចសរសេរ

$$\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x)$$

ដូច្នេះ $\lambda y \in f(F)$ ។

សំណើ និង និយមន័យ 3.2. E និង E' ជាលំហវ៉ិចទ័រពីរលើកាយ $\mathbb{K}$ តែមួយ។ $f : E \to E'$ ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ។ គេកំណត់យក

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E : f(x) = \mathbf{0}\} \tag{3.3}$$

ដូច្នេះ $\operatorname{Ker} f$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃ E ហៅថាស្នូល[4] នៃ f ។

សំរាយបញ្ជាក់
យើងយក $x, y \in \operatorname{Ker} f$ យើងបាន

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

ដូច្នេះ $x + y \in \operatorname{Ker} f$ ។
ដូចគ្នាដែរ យើងយក $x \in \operatorname{Ker} f$ និង $\lambda \in \mathbb{K}$ យើងបាន

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

ដូច្នេះ $\lambda x \in \operatorname{Ker} f$ ។

សំណើ 3.1. E និង E' ជាលំហវ៉ិចទ័រពីរលើកាយ $\mathbb{K}$ តែមួយ ហើយ $f \in \mathcal{L}(E, E')$ ។ ដូច្នេះ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់លុះត្រាតែ $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់
ឧបមាថា $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ និង $x, y \in E$ ដែល $f(x) = f(y)$ ។ យើងបាន

$$f(x) - f(y) = \mathbf{0}$$

ដូច្នេះ $f(x - y) = \mathbf{0}$ រួច $x - y \in \operatorname{Ker} f$ *i.e.* $x = y$ ។ ដូច្នេះ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។
ច្រាសមកវិញ ឧបមាថា f ប្រកាន់ និង $x \in \operatorname{Ker} f$ *i.e.* $f(x) = \mathbf{0}$ ។ យើងបាន $f(x) = f(\mathbf{0})$ រួច $x = \mathbf{0}$ ។ ដូច្នេះ $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ ។

ឧទាហរណ៍ 3.14. គេយក $E = E_1 \oplus E_2$ និង pr_1 ជាចំណោលលើ E_1 ស្របនឹង E_2 ដែលបានអោយនៅក្នុងឧទាហរណ៍ 3.12 ។ យើងបាន $\operatorname{Im}(\mathrm{pr}_1) = E_1$ និង $\operatorname{Ker}(\mathrm{pr}_1) = E_2$ ។

ឧទាហរណ៍ 3.15. គេមាន

$$\begin{array}{cccc} D & : & \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ & & P & \mapsto & P' \end{array}$$

ដូច្នេះស្នូលនៃ D ត្រូវបានបង្កើតឡើងដោយពហុធាថេរ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត $\operatorname{Im} D = \mathbb{R}[x]$ ព្រោះ បើ $P \in \mathbb{R}[x]$ នោះ $Q(x) := \displaystyle\int_0^x P(t)dt$ ជាពហុធាមួយ និង គេបាន $Q' = P$ *i.e.* $D(Q) = P$ ។

[4]ជាភាសាបារាំង noyau និង ជាភាសាអង់គ្លេស kernel

ឧទាហរណ៍ 3.16. គេយក

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x',y',z') \end{array}$$

ដែល $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & y & - & z \\ y' & = & 2x & + & y & - & 3z \\ z' & = & 3x & + & 2y & - & 4z \end{array}\right.$ ។

ដូច្នេះ Ker$f$ ជាសំណុំនៃត្រីធាតុ $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

ដោយដោះស្រាយ យើងទទួលបានយ៉ាងងាយ $x=2\lambda.y=-\lambda, z=\lambda$ ដែល $\lambda\in\mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ $\operatorname{Ker} f$ ជាបន្ទាត់វ៉ិចទ័របង្ករដោយវ៉ិចទ័រ $(2,-1,1)$ ។

ជាបន្ទាប់ យើងនឹងកំណត់ $\operatorname{Im} f$ ។

$(x',y',z')\in\operatorname{Im} f$ លុះត្រាតែមាន $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធ

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & x' \\ 2x & + & y & - & 3z & = & y' \\ 3x & + & 2y & - & 4z & = & z' \end{array}\right.$$

ដូច្នេះ យើហនឹងរក x',y',z' ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធសមីការចុះសំរុង។ ដោយធ្វើអោយប្រព័ន្ធមានទំរង់ជាថ្នាក់ យើងបាន

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & x' \\ & & -y & - & z & = & y'-2x' \\ & & -y & - & z & = & z'-3x' \end{array}\right.$$

រួច

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & x' \\ & & -y & - & z & = & -2x'+y' \\ & & & & 0 & = & -x'-y'+z' \end{array}\right.$$

ល័ក្ខខ័ណ្ឌនៃភាពចុះសំរុងនៃប្រព័ន្ធសមីការ យើងទទួលបាន $-x'-y'+z'=0$ ពោគឺ $x'+y'-z'=0$ ។ ដូច្នេះ រូបភាពនៃ f ជាប្លង់នៃ $\mathbb{R}^3$ សមីការ $x'+y'-z'=0$ ។

សំណើ 3.2. យក $f\in\mathcal{L}(E,E')$ និង $\{v_i\}_{i\in I}$ ជាគ្រួសារនៃវ៉ិចទ័រនៃ E ។

1. បើ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ និង $\{v_i\}_{i\in I}$ ជាគ្រួសារសេរីនៃ E នោះ $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ ជាគ្រួសារសេរីនៃ E' ។
2. បើ f ជាអនុវត្តន៍ពេញ និង $\{v_i\}_{i\in I}$ ជាគ្រួសារបង្ករនៃ E នោះ $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ ជាគ្រួសារបង្ករនៃ E' ។

ជាពិសេស បើ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ នោះរូបភាពនៃគោលមួយនៃ E ជាគោលមួយនៃ E' ។

សំរាយបញ្ជាក់

1. ឧបមាថា $\{v_i\}_{i\in I}$ ជាគ្រួសារសេរីមួយ និង f ប្រកាន់ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ ជាគ្រួសារសេរីមួយ។
   យើងយក $\{f(v_{\alpha_i})\}_{1\leq i\leq n}$ ជាគ្រួសារកំណត់នៃ $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ ដែល
   $$\lambda_1 f(v_{\alpha_1})+\cdots+\lambda_n f(v_{\alpha_n})=\mathbf{0}$$
   ដែល $\{\lambda_i\}_{1\leq i\leq n}$ ជាស្កាលែរនៅក្នុង $\mathbb{K}$ ។
   យើងបាន
   $$f(\lambda_1 v_{\alpha_1}+\cdots+\lambda_n v_{\alpha_n})=\mathbf{0}$$
   មានន័យថា
   $$\lambda_1 v_{\alpha_1}+\cdots+\lambda_n v_{\alpha_n}\in\operatorname{Ker} f$$
   ដោយសារតែ $\operatorname{Ker} f=\{\mathbf{0}\}$ យើងបាន
   $$\lambda_1 v_{\alpha_1}+\cdots+\lambda_n v_{\alpha_n}=\mathbf{0}$$
   $\{v_1\}_{i\in I}$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ នោះគ្រួសារកំណត់ $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ ជាគ្រួសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរមួយដែរ។ ដូច្នេះ យើងទទួលបាន $\lambda_1=0,\cdots,\lambda_n=0$ ។ គ្រួសារ $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ ជាគ្រួសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរមួយ។

2. ឧបមាថា $\{v_i\}_{i\in I}$ ជាគ្រួសារ បង្ករ និង f ពេញ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ ជាគ្រួសារ បង្ករមួយ។
   យើងយក $y\in E'$ ។ តាមលក្ខណៈនៃ f នោះមាន $x\in E$ ដែល $y=f(x)$ ។
   តាមលក្ខណៈនៃគ្រួសារ $\{v_i\}_{i\in I}$ គេអាចសរសេរ x ជាបន្សំលីនេអ៊ែរកំណត់
   $$x=\lambda_1 v_{\alpha_1}+\cdots+\lambda_n v_{\alpha_n}$$
   ដូច្នេះ
   $$f(x)=f(\lambda_1 v_{\alpha_1}+\cdots+\lambda_n v_{\alpha_n})$$
   យើងបាន
   $$y=\lambda_1 f(\alpha_1)+\cdots+\lambda_n f(\alpha_n)$$
   ដូច្នេះ y ជាបន្សំលីនេអ៊ែរកំណត់នៃគ្រួសារ $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ ក្នុង E' មានន័យថា $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ ជាគ្រួសារបង្ករមួយនៃ E' ។

ទ្រឹស្តីបទ 3.1. លំហវ៉ិចទ័រពីរមានវិមាត្រកំណត់អ៊ីសូមរនឹងគ្នាលុះត្រាតែវាមានវិមាត្រដូចគ្នា។

សំរាយបញ្ជាក់

E និង E' ជាលំហវ៉ិចទ័រពីរលើកាយ $\mathbb{K}$ ។

1. ឧបមាថា E និង E' អ៊ីសូរមរនឹងគ្នា។ ដូច្នេះ មានអ៊ីសូមរភីស $f:E\to E'$ ។ E មានវិមាត្រកំណត់ និងសន្មត់ $\dim E=n$ ។ ដូច្នេះ យើងយក $\mathcal{B}_E=\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ ជាគោលមួយនៃ E ។ យើងយក $e_i'=f(e_i)$ ($i\in[1,n]$) ។ តាមសំណើរ 3.2 យើងបាន $\mathcal{B}_{E'}=\{e_i'\}_{1\leq i\leq n}$ រូបភាពនៃ $\mathcal{B}_E$ ជាគោលមួយនៃ E' ។ ដូច្នេះ $\dim E'=n$ ។

2. ច្រាសមកវិញ ឧបមាថា $\dim E = \dim E' = n$ ។ យើងយក $\mathcal{B}_E = \{e_i\}_{1\le i\le n}$ និង $\mathcal{B}_{E'} = \{e'_i\}_{1\le i\le n}$ ជាគោលនៃ E និង E' រៀងគ្នា។ ឧបមាថា $f : E \to E'$ ជាអនុវត្តន៍ត្រូវបង្កើតតាមបែបខាងក្រោម៖

   1. ចំពោះ $i = 1, 2, \cdots, n$ គេយក $f(e_i) = e'_i$
   2. បើ $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_k e_i$ គេយក $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i e'_i$

   មានន័យថា គេកំណត់ f លើគោលនៃ E និង គេបន្លាយ f តាមភាពលីនេអ៊ែរលើ E ទាំងមូល។ ដូច្នេះ គេអាចផ្ទៀងផ្ទាត់បានយ៉ាងងាយថា f ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ និង មួយទល់មួយ (អ៊ីសូមរភីសមួយ)។

ទ្រឹស្តីបទ 3.2. E និង E' ជាលំហវិចទ័រពីរមានវិមាត្រកំណត់ និង $f : E \to E'$ ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ។ ដូច្នេះ គេបាន
$$\dim E = \mathrm{Rg}\, f + \dim(\mathrm{Ker}\, f) \tag{3.4}$$

សំរាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា $\dim E = n$ និង $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = r$ ។ ដូច្នេះ យើងនឹងបង្ហាញថា $\dim(\mathrm{Im}\, f) = n - r$ ។ យក $\{w_1, \cdots, w_r\}$ ជាគោលមួយនៃ $\mathrm{Ker}\, f$ និង $\{v_1, \cdots, v_{n-r}\}$ ជាគ្រួសារមួយនៃវិចទ័រដែល $\{w_1, \cdots, w_r, v_1, \cdots, v_{n-r}\}$ ជាគោលមួយនៃ E ។ យក $\mathcal{B} = \{f(v_1), \cdots, f(v_{n-r})\}$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $\mathcal{B}$ ជាគោលនៃ $\mathrm{Im}\, f$ ។

1. $\mathcal{B}$ ជាគ្រួសារបង្ករ។ ដោយហេតុថា យើងយក $y = f(x) \in \mathrm{Im} f$ ។ ធាតុ x មួយនៃ E មានទំរង់
$$x = a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r + b_1 v_1 + \cdots + b_{n-r} v_{n-r}$$
   ដូច្នេះ យើងបាន
$$\begin{aligned} y &= \underbrace{a_1 f(w_1) + \cdots + a_r f(w_r)}_{0} + b_1 f(v_1) + \cdots + b_{n-r} f(v_{n-r}) \\ &= b_1 f(v_1) + \cdots + b_{n-r} f(v_{n-r}) \end{aligned}$$
   i.e.$\mathcal{B}$ បង្ករ $\mathrm{Im}\, f$ ។

2. $\mathcal{B}$ ជាគ្រួសារសេរី។ ឧបមាថា $\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_{n-r} f(v_{n-r}) = \mathbf{0}$ ។ យើងបាន $f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-r} f(v_{n-r}) = \mathbf{0}$ ។ ដូច្នេះ $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} \in \mathrm{Ker}\, f$ ។
   ជាវិបាក មាន $a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$ ដែល $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} = a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r$ ។ ដូច្នេះ
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} - a_1 w_1 - \cdots - a_r w_r = \mathbf{0}$$
   ដោយសារតែ $\{v_1, \cdots, v_{n-r, w_1, \cdots, w_r}\}$ ជាគ្រួសារសេរី។ នោះមេគុណនៃបន្សំលីនេអ៊ែរនេះស្មើនឹងសូន្យទាំងអស់ ជាពិសេសស $\lambda_1 = 0, \cdots, \lambda_{n-r} = 0$ ។ ដូច្នេះ $\mathcal{B}$ ជាគ្រួសារសេរី។

វិបាក 3.1. យក $f \in \mathcal{L}(E, E')$ f ដែល E និង E' ជាលំហវិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់ដូចគ្នា (ជាពិសេស ដូចជាឧទាហរណ៍ $f \in \mathrm{End}\, f$ ជាមួយនឹង E មានវិមាត្រកំណត់)។ ដូច្នេះ សំណើរខាងក្រោមសមមូលគ្នា៖

1. f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់

2. f ជាអនុវត្តន៍ពេញ

3. f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ

សំរាយបញ្ជាក់
យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថាលក្ខណៈ 1 និង 2 នៃវិបាក 3.1 សមូលគ្នា។
តាមសំណើ 3.1 អនុវត្តន៍ f ប្រកាន់ លុះត្រាតែ $\operatorname{Ker} f = 0$ ។ ដោយសារតែ $\dim E = \operatorname{Rg} f + \dim(\operatorname{Ker} f)$ ។ ដូច្នេះ f ជាប្រកាន់ លុះត្រាតែ $\dim E = \operatorname{Ker} f$ មានន័យថា $\dim E = \dim(\operatorname{Im} f)$ ។
តាមសម្មតតិកម្ម $\dim E = \dim E'$ ។ ដូច្នេះ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ លុះត្រាតែ $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim E'$ មានន័យថា f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ លុះត្រាតែ f ជាអនុវត្តន៍ពេញ។

ចំណាំ 3.2. លទ្ធផលនៃវិបាក 3.1 មិនត្រឹមត្រូវក្នុងលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រមិនកំណត់។ ដូចជាឧទាហរណ៍ អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$$

កំណត់ក្នុងឧទារណ៍ 3.15 ជាអនុត្តន៍ពេញ។ ប៉ុន្តែមិនមែនជាអនុត្តន៍ប្រកាន់។

3.3 ម៉ាទ្រីស និង អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ

បើ E' ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយលើកាយ $\mathbb{K}$ និង A ជាសំណុំមិនទទេមួយ នោះ អនុវត្តន៍ $f : A \to E'$ ត្រូវបានប្រដាប់ដោយទំរង់មួយនៃលំហវ៉ិចទ័រលើ $\mathbb{K}$ ដោយប្រមាណវិធី៖

$$\begin{array}{rcccc} f+g & : & A & \to & E' \\ & & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

និង

$$\begin{array}{rcccc} \lambda f & : & A & \to & E' \\ & & x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

ជាពិសេស $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,E')$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងមួយនៃសំណុំអនុវត្តន៍ $f : E \to E'$ ។

សំណើ 3.3. $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,E')$ ត្រូវបានកំណត់ដោយប្រមាណវិធី៖

$$\begin{array}{rcccc} f+g & : & E & \to & E' \\ & & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

និង

$$\begin{array}{rcccc} \lambda f & : & E & \to & E' \\ & & x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយលើយកាយ $\mathbb{K}$ ។
លើសពីនេះ បើ $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E')$ និង $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E'')$ នោះ $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E'')$ ហើយគេបាន៖

$$g \circ (f + h) = g \circ f + g \circ h \tag{3.5}$$
$$(g + k) \circ f = g \circ f + k \circ f \tag{3.6}$$
$$g \circ (\lambda f) = \lambda g \circ f \tag{3.7}$$

ចំពោះគ្រប់ $f, h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E')$ ចំពោះគ្រប់ $g, k \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E', E'')$ និងចំពោះគ្រប់ $\lambda \in \mathbb{K}$ ។
ជាចុងក្រោយ បើ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ នោះ f^{-1} ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ។

3.3.1 **ម៉ាទ្រីស**

និយមន័យ និង កំណត់សរសេរ 3.3. គេហៅថាម៉ាទ្រីសមានទំហំ (p, n) រឺ $p \times n$ មានមេគុណក្នុង $\mathbb{K}$ ជាតារាង A មួយរាងចតុកោណកែងមាន pn ធាតុរៀបលើ p ជួរដេក និងលើ n ជួរឈរ៖

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

ដែលគេសរសេរយ៉ាងខ្លី

$$A = (a_{ij}) \tag{3.9}$$

សំណុំនៃម៉ាទ្រីសមាន p ជួរដេក និង n ជួរឈរកំណត់សរសេរដោយ $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ រឺ $\mathbb{K}^{p \times n}$ ។
បើ $p = n$ នោះ $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ ហៅថាម៉ាទ្រីសការេទំហំ n និង នឹងត្រូវកំណត់សរសេរដោយ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ រឺ $\mathbb{K}^{n \times n}$ ។

ចំណាំ 3.3. នៅក្នុងកំណត់សរសេរ a_{ij} សន្ទស្សន៍ទីមួយ i សំគាល់ជួរដេកទី i និង សន្ទស្សន៍ទីពីរ j សំគាល់ជួរឈរទី j ៖

$$a \quad \underbrace{i}_{\text{សន្ទស្សន៍នៃជួរដេក}} \quad \underbrace{j}_{\text{សន្ទស្សន៍នៃជួរឈរ}}$$

ឧទាហរណ៍ 3.17. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ និង $\begin{pmatrix} 1 & 2-i & 3+i \\ 0 & 1+i & i \\ -i & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ។

កំណត់សរសេរ 3.1. កំណត់សរសេរផ្សេងមួយទៀតដែលយើងនឹងប្រើនៅខាងមុខគឺកំណត់សរសេរតាមវ៉ិចទ័រជួរឈរ៖

$$A = ||c_1, \cdots, c_n|| \tag{3.10}$$

ដែល $c_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{pk} \end{pmatrix}$ ជាជួឈរទី k ។

លក្ខណៈ 3.1. នៅលើសំណុំ $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ គេកំណត់ប្រមាណវិធី៖

1. ប្រមាណវិធីបូក
   ចំពោះ $A=(a_{ik})$ និង $B=(b_{ik})$ គេកំណត់
$$A+B=(a_{ik}+b_{ik}) \tag{3.11}$$
2. ប្រមាណវិធីគុណដោយស្កាលែរ
   ចំពោះ $A=(a_{ik})$ និង $\lambda\in\mathbb{K}$ គេកំណត់
$$\lambda A=(\lambda a_{ik}) \tag{3.12}$$

ដូច្នេះ សំណុំ $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ មានទំរង់ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយលើកាយ $\mathbb{K}$ និង $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})=pn$ ។ ធាតុអព្យាក្រិតជាម៉ាទ្រីសសូន្យមានទំហំ (p,n) និងតាងដោយ **o** ។

ឧទាហរណ៍ 3.18. យើងមាន
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 7\\ 4 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
និង
$$5\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 & 15\\ 5 & 10 & 5 & -5\end{pmatrix}$$

3.3.2 ម៉ាទ្រីសនៃអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ

E និង E' ជាលំហវ៉ិចទ័រពីលើកាយ $\mathbb{K}$ មានវិមាត្រ n និង p រៀងគ្នា ហើយ $f:E\to E'$ ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ។ យើងជ្រើសរើស $\{e_1,\cdots,e_n\}$ គោលមួយនៃ E និង $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p\}$ គោលមួយនៃ E' ។ ដូច្នេះ រូបភាពនៃ $e_1,\cdots,v_n$ ដោយ f បំបែកលើគោល $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p\}$ ៖
$$\begin{aligned} f(e_1)&=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{p1}\varepsilon_p\\ f(e_2)&=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{p2}\varepsilon_p\\ &\vdots\\ f(e_n)&=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{pn}\varepsilon_p\end{aligned}$$
ដូច្នេះ យើងអោយនិយមន័យខាងក្រោម៖

និយមន័យ និង កំណត់សរសេរ 3.4. គេហៅម៉ាទ្រីសនៃ f ក្នុងគោល $\{e_1,\cdots,e_n\},\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p\}$ ជាម៉ាទ្រីសកំណត់សរសេរដោយ $M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$ ស្ថិតនៅក្នុងសំណុំ $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ ដែលជួរឈររបស់វាជាកុំប៉ូសង់នៃវ៉ិចទ័រ $f(e_1),\cdots,f(e_n)$ ក្នុងគោល $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p\}$ ៖
$$M(f)_{v_i}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n)\end{array}\\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{array} \tag{3.13}$$

គេក៏ប្រើផងដែរកំណត់សរសេរ $||f(e_1), \cdots, f(e_n)||_{\varepsilon_j}$ ។ ប្រសិនបើគ្មានការភាន់ច្រឡំទេ គេក៏សរសេរ $M(f)$ ជំនួស $M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$ ប៉ុន្តែ ជាការពិណាស់ម៉ាទ្រីសនៃ f អាស្រ័យនឹងការជ្រើសរើសនៃគោលនៃ E និង E' ។ ក្នុងករណីដែល f ជាអង់ដូមរភីសមួយ គេអាចជ្រើសរើសគោលដូចគ្នាក្នុង E ។ ក្នុងករណីនេះ គេនឹងកំណត់សរសេរ $M(f)_{e_i}$ ជំនួស $M(f)_{e_i,e_j}$ ។

សំណើ 3.4. E និង E' ជាលំហវ៉ិចទ័រពីលើកាយ $\mathbb{K}$ មានវិមាត្រ n និង p រៀងគ្នា ហើយ $\{e_i\}$ និង $\{\varepsilon_j\}$ ជាគោលនៃ E និង E' រៀងគ្នា។ ដូច្នេះ អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{rcccl} M & : & \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,E') & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ & & f & \mapsto & M(f)_{e_i,\varepsilon_j} \end{array} \tag{3.14}$$

ជាអ៊ីសូមរភីសមួយនៃលំហវ៉ិចទ័រ មានន័យថា ចំពោះគ្រប់ $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,E')$ និងចំពោះគ្រប់ $\lambda \in \mathbb{K}$ គេបាន

$$M(f+g) = M(f) + M(g) \tag{3.15}$$

និង

$$M(\lambda f) = \lambda M(f) \tag{3.16}$$

ជាពិសេស $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(E,E') = \dim E \times \dim E' = np$ ។

សំរាយបញ្ជាក់
យើងមាន

$$\begin{aligned} M(f+g)_{e_i,\varepsilon_j} &= ||(f+g)(e_1), \cdots, (f+g)(e_n)||_{\varepsilon_j} \\ &= ||f(e_1)+g(e_1), \cdots, f(e_n)+g(e_n)||_{\varepsilon_j} \\ &= ||f(e_1), \cdots, f(e_n)||_{\varepsilon_j} + ||g(e_1), \cdots, g(e_n)||_{\varepsilon_j} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$M(f+g)_{e_i,\varepsilon_j} = M(f)_{e_i,\varepsilon_j} + M(g)_{e_i,\varepsilon_j}$$

ដូចគ្នាដែរ

$$\begin{aligned} M(\lambda f)_{e_i,\varepsilon_j} &= ||(\lambda f)(e_1), \cdots, (\lambda f)e_n||_{\varepsilon_j} \\ &= ||\lambda f(e_1), \cdots, \lambda f(e_n)||_{\varepsilon_j} \\ &= \lambda ||f(e_1), \cdots, f(e_n)||_{\varepsilon_j} \end{aligned}$$

យើងបាន

$$M(\lambda f)_{e_i,\varepsilon_j} = \lambda M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$$

ដូច្នេះ M ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ។
ម្យ៉ាងវិញទៀត M ជាអនុវត្តន៍ពេញ។ ព្រោះចំពោះ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$$

និង $f \in \mathcal{L}(E,F)$ កំណត់តាមបែបខាងក្រោម។ គេយកជាដំបូង

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{p1}\varepsilon_p \\ f(e_2) &= a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{p2}\varepsilon_p \\ \\ f(e_n) &= a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{pn}\varepsilon_p \end{aligned}$$

ជាបន្ទាប់គេបន្លាយ f តាមភាពលីនេអ៊ែរលើ E មានន័យថា ចំពោះ

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in E$$

គេយក

$$f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$$

ដូច្នេះ គេអាចផ្ទៀងផ្ទាត់បានដោយងាយថា f ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ និង $A = M(f)_{e_i,\epsilon_j}$ ។ ជាចុងក្រោយ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។ ព្រោះ ចំពោះ $f \in \operatorname{Ker} M$ ៖

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

មានន័យថា $f(e_1) = 0, \cdots, f(e_n) = 0$ ។
ដូច្នេះ ចំពោះ $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in E$ គេបាន $f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0$ *i.e.* $f = 0$ ។ តាមសំណើ 3.1 គេបាន f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។

ឧទាហរណ៍ 3.19. $E = \mathbb{R}^n$ ជាលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រ n និង

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_E \ : \ E &\to E \\ x &\mapsto x \end{aligned} \tag{3.17}$$

យើងអោយគោល $\{e_i\}$ មួយនៃ E ។ យើងបាន $\mathrm{id}_E(e_i) = e_i\}$ និង ដូច្នេះ យើងបាន

$$M(\mathrm{id}_E)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

ម៉ាទ្រីសនេះកំណត់សរសេរដោយ I_n រឺយ៉ាងខ្លី I និងហៅថាម៉ាទ្រីសឯកតានៃ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ។

ឧទាហរណ៍ 3.20. យក $E = \mathbb{R}^2$ និង

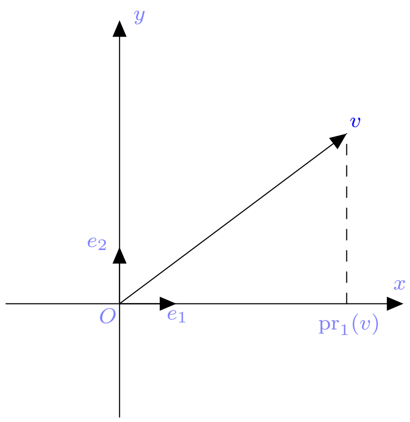
$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_1 \ : \ \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x,0) \end{aligned}$$

យក $\{e_1, e_2\}$ ជាគោលកាណូនិកនៃ $\mathbb{R}^2$ ។ យើងបាន

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{pr}_1(e_1) & = & e_1 \\ \mathrm{pr}_1(e_2) & = & 0 \end{array}$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$M(\mathrm{pr}_1)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



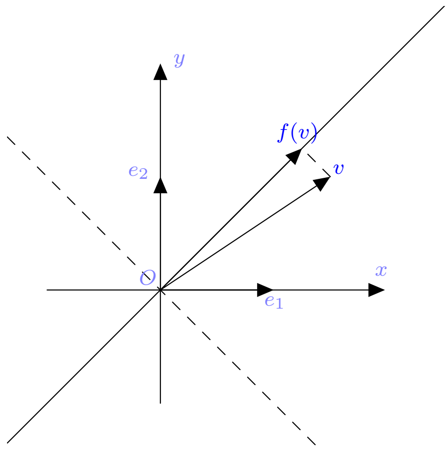
រូប 3.2:

ឧទាហរណ៍ 3.21. យក $E = \mathbb{R}^2$ និង f ជាចំណោលលើកន្លះបន្ទាត់ពុះទីមួយ ស្របនឹងកន្លះបន្ទាត់ពុះទីពីរ។ យក $\{e_1, e_2\}$ ជាគោលកាណូនិកនៃ E នោះយើងបាន

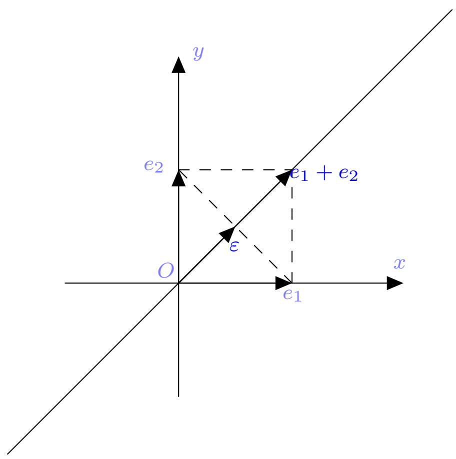
$$f(e_1) = f(e_2) = \varepsilon = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$M(f)_{e_i} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



រូប 3.3:

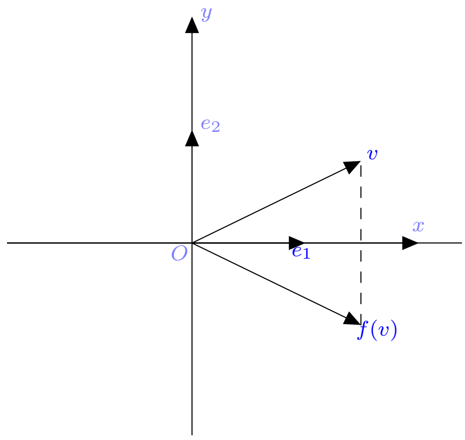


រូប 3.4:

ឧទាហរណ៍ 3.22. យក $E = \mathbb{R}^2$ និង f ជាបំលែងឆ្លុះអ័ក្ស Ox ស្របនឹងអ័ក្ស Oy ។ យក $\{e_1, e_2\}$ ជាគោលកាណូនិក យើងបាន

$$f(e_1) = e_1 \quad \text{និង} \quad f(e_2) = -e_2$$

ដូច្នេះ យើងបាន $M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ។

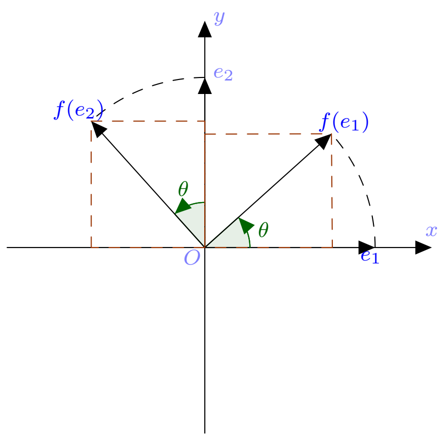


រូប 3.5:

ឧទាហរណ៍ 3.23. ក្នុងប្លង់ $\mathbb{R}^2$ ប្រដាប់ដោយគោលកាណូនិក $\{e_1, e_2\}$ គេមានបំលែងវិលr ផ្ចិត O និងមុំប៉ូលែរ θ ។ យើងបានយ៉ាងងាយ

$$\begin{array}{rcrcr} f(e_1) & = & \cos\theta\, e_1 & + & \sin\theta\, e_2 \\ f(e_2) & = & -\sin\theta\, e_1 & + & \cos\theta\, e_2 \end{array}$$

ដូច្នេះយើងបាន $M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ។



រូប 3.6:

ឧទាហរណ៍ 3.24. យក $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ជាគោលកាណូនិកនៃ $\mathbb{R}^2$ និង $\{e_1, e_2, e_3\}$ ជាគោលកាណូនិកនៃ $\mathbb{R}^3$ ។ គេអោយអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x, y, z) & \mapsto & (x-y, z-y) \end{array}$$

យើងបាន

$$\begin{array}{rcccccl} f(e_1) & = & f(1,0,0) & = & (1,0) & = & \varepsilon_1 \\ f(e_2) & = & f(0,1,0) & = & (-1,-1) & = & -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ f(e_3) & = & f(0,0,1) & = & (0,1) & = & \varepsilon_2 \end{array}$$

ដូច្នេះ

$$M(f)_{e_i,\varepsilon_j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ឧទាហរណ៍ 3.25. គេអោយទំរង់លីនេអ៊ែរលើ $\mathbb{R}^n$ ៖

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \end{array}$$

$\mathbb{R}^n$ ប្រដាប់ដោយគោលគោលកាណូនិក $\{e_1, \cdots, e_n\}$ និង $\mathbb{R}$ ប្រដាប់ដោយគោលកាណូនិក $\{\varepsilon\}$ (មានន័យថា $\varepsilon = 1$) គេបាន

$$\begin{array}{lllllll} f(e_1) & = & f(1,0,\cdots,0) & = & a_1 & = & a_1\varepsilon \\ f(e_2) & = & f(0,1,0,\cdots,0) & = & a_2 & = & a_2\varepsilon \\ \vdots & & & & & & \\ f(e_n) & = & f(0,\cdots,0,1) & = & a_n & = & a_n\varepsilon \end{array}$$

ដូច្នេះ

$$M(f)_{e_i,\varepsilon_j} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

យើងសង្កេតថាទំរង់លីនេអ៊ែរមួយត្រូវបានតាងដោយម៉ាទ្រីសជួរដេកមួយ។

3.4 ផលគុណនៃពីម៉ាទ្រីស

និយមន័យ 3.1. គេហៅថាផលគុណនៃម៉ាទ្រីស ជាអនុវត្តន៍

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ ((a_{ij}), (b_{jk})) & \mapsto & (c_{ik}) \end{array} \tag{3.19}$$

ដែល

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \tag{3.20}$$

ដូច្នេះធាតុ c_{ik} នៃជួរដេកទី i និង ជួរឈរទី k នៃផលគុណ $C = AB$ ជាផលបូកនៃផលគុណនៃធាតុនៃជួរដេកទី i នៃ A ដោយធាតុដែលមានលំដាប់ដូចគ្នានៃជួរឈរទី k នៃ B រឺនិយាយមួយបែបទៀត ធាតុ c_{ik} នៃម៉ាទ្រីសផលគុណ $C = AB$ ត្រូវបានចាត់ទុកដូចផលគុណស្កាលែរនៃវិចទ័រជួរដេកទី i នៃម៉ាទ្រីសទីមួយ A និង វិចទ័រជួរឈរទី k នៃម៉ាទ្រីសទីពីរ B ។ ជាសង្ខេប គេថាផលគុណនៃពីរម៉ាទ្រីសត្រូវធ្វើ ជួរដេកជាមួយ

ជួរឈរ។ នេះជាគំនូសបំព្រួញនៃនិយមន័យនេះ៖

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jk} & \cdots & b_{iq} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nq} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pi} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{j1} & \cdots & c_{jk} & \cdots & c_{jq} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pk} & \cdots & c_{pq} \end{pmatrix} \end{array}$$

រឺ ដោយពង្រីក

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{jk} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = c_{ik} \tag{3.21}$$

ចំណាំ 3.4. ផលគុណ AB ត្រូវធ្វើបានតែបើចំនួនជួរឈរនៃ A ស្មើនឹងចំនួនជួរដេកនៃ B ។

ឧទាហរណ៍ 3.26. គេមាន $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ។ យើងបាន

$$\begin{array}{ccc} & \times & \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} & = & \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{C=AB} \end{array}$$

ឧទាហរណ៍ 3.27. គេមាន $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ។ យើងបាន

$$\begin{array}{ccc} & \times & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}^{B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} & = & \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}}_{AB} \end{array}$$

ឧទាហរណ៍ 3.28. គេមាន $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ និង $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ។
យើងបាន $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ និង $AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ។

សំណើ 3.5. 1. ប្រមាណវិធីគុណនៃម៉ាទ្រីសមានលក្ខណៈផ្តុំ *i.e.* ចំពោះគ្រប់ $A \in \mathcal{M}_{p,n}, B \in \mathcal{M}_{n,q}$ និង ចំពោះគ្រប់ $C \in \mathcal{M}_{q,m}$ គេបាន

$$A(BC) = (AB)C \tag{3.22}$$

2. ប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីសមានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធីបូកម៉ាទ្រីស *i.e.* ចំពោះគ្រប់ $A, D \in \mathcal{M}_{p,n}$ និង ចំពោះគ្រប់ $B, C \in \mathcal{M}_{n,q}$ គេបាន

$$\begin{array}{rcl} A(B+C) & = & AB+AC \\ (A+D)B & = & AB+DB \end{array} \tag{3.23}$$

$$A(B+C) = AB+AC \tag{3.24}$$

$$(A+D)B = AB+DB \tag{3.25}$$

ចំណាំ 3.5. យើងគួកំណត់សំគាល់ថា៖

1. គេអាចទទួលបាន $AB = \mathbf{0}$ ដោយមិនចាំបាច់ A រឺ B ស្មើនឹងសូន្យ។
2. $AB = AC$ ជាមួយនឹង $A \neq \mathbf{0}$ មិនបណ្តាលអោយបាន $B = C$ ។
3. ជាទូទៅ $AB \neq BA$ មានន័យថា ប្រមាណវិធីគុណមិនមានលក្ខណៈត្រឡប់។

ចំណាំ 3.6. យើងសង្កេតឃើញថាប្រមាណវិធីគុណជាប្រមាណវិធីក្នុងលើសំណុំ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$[5] នៃម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n មានន័យថាជាអនុវត្តន៍មួយ

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

គេអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ថាម៉ាទ្រីសឯកតា I_n ជាធាតុអព្យាក្រិតចំពោះប្រមាណវិធីគុណ *i.e.* ចំពោះគ្រប់ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ គេបាន

$$I_nA = AI_n = A \tag{3.26}$$

3.5 ម៉ាទ្រីសនៃវ៉ិចទ័រ ការគណនារូបភាពនៃវ៉ិចទ័រ

និយមន័យ 3.2. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយមានវិមាត្រ n និង $\{e_1, \cdots, e_n\}$ ជាគោលមួយនៃ E ហើយ $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ ជាធាតុមួយនៃ E ។ គេហៅថាម៉ាទ្រីសនៃវ៉ិចទ័រ x ក្នុងគោល $\{e_i\}$ ជាម៉ាទ្រីសជួរឈរនៃកុំប៉ូសង់នៃ x ក្នុងគោល $\{e_i\}$ ៖

$$M(x)_{e_i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

[5]សំណុំ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីបូក និង ប្រមាណវិធីគុណមានទំរង់ជាកង។

យ៉ាងខ្លី គេកំណត់សរសេរផងដែរ $M(x)$ ។

ចំណាំ 3.7. និយមន័យនេះសមស្របជាមួយនឹងនិយមន័យនៃម៉ាទ្រីសនៃអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ។ ដោយហេតុថា គេអាចប្រដូចគ្រប់ធាតុនៃ E ទៅនឹងអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយពី $\mathbb{K}$ ទៅ E ៖

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{K} & \to & E \\ & & \lambda & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

បើគេសរសេរ f ក្នុងគោល $\{\varepsilon\}$ ($\varepsilon = 1$)នៃ $\mathbb{K}$ និង $\{e_i\}$ នៃ E គេបាន

$$f(\varepsilon) = x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$$

ដូច្នេះ

$$M(f)_{\varepsilon,e_i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

សំណើ 3.6. E និង E' ជាពីរលំហវ៉ិចទ័រលើ $\mathbb{K}$ ហើយ $\{e_1, \cdots, e_n\}$ និង $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p\}$ ជាគោលពីរនៃ E និង E' រៀងគ្នា។ ចំពោះគ្រប់អនុវត្តន៍ $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E')$ និង ចំពោះគ្រប់ $x \in E$ គេបាន

$$M(f(x))_{\varepsilon_j} = M(f)_{e_i,\varepsilon_j} M(x)_{e_i} \tag{3.28}$$

រឺយ៉ាងខ្លី

$$M(f(x)) = M(f)M(x) \tag{3.29}$$

សំរាយបញ្ជាក់

យើងយក $M(f)_{e_i,\varepsilon_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$ ដែលមានន័យថា

$$f(e_j) = a_{1j}\varepsilon_1 + \cdots + a_{pj}\varepsilon_p = \sum_{k=1}^{p} a_{kj}\varepsilon_k$$

យើងយក $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ យើងបាន

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{p} a_{kj}\varepsilon_k \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \right) \varepsilon_k \\ &= \sum_{j=1}^{p} y_k\varepsilon_k \end{aligned}$$

ដែល $y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j$ ។

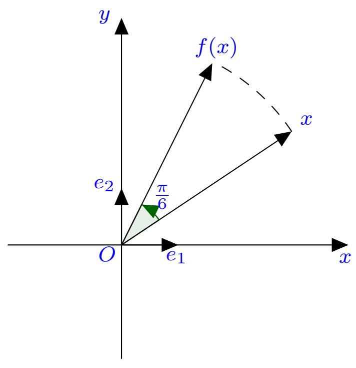
ដូច្នេះ $M(f(x))_{\varepsilon_j} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\begin{aligned} M(f)_{e_i,\varepsilon_j} M(x)_{e_i} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $M(f)_{e_i,\varepsilon_j} M(x)_{e_i} = M(f(x))_{\varepsilon_j}$ ។

ឧទាហរណ៍ 3.29. ឬង់ $\mathbb{R}^2$ ប្រដាប់ដោយគោលកាណូនិច។ កំណត់រូបភាពនៃវ៉ិចទ័រ $x = (3,2)$ តាមបំលែងឆ្លុះផ្ចិត O និងមុំ $\frac{\pi}{6}$ ។



រូប 3.7:

យើងបាន

$$\begin{aligned} M(f(x)) &= M(f)M(x) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1.6 \\ 1.2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.6 ផលគុណម៉ាទ្រីស បណ្ដាក់នៃអនុវត្តន៍ ចំរាស់

សំណើ 3.7. យក E, F, G ជាលំហវ៉ិចទ័របីលើ $\mathbb{K}$ និង $\{e_1, \cdots, e_n\}, \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p\}, \{\eta, \cdots, \eta\}$ ជាគោលនៃ E, F, G រៀងគ្នា។ បើ $g \in \mathcal{L}(E, F)$ និង $f \in \mathcal{L}(E, G)$ គេបាន $f \circ g \in \mathcal{L}(E, G)$ រួច

$$M(f \circ g)_{e_i, \eta_k} = M(f)_{\varepsilon_j, \eta_k} M(g)_{e_i, \varepsilon_j} \tag{3.30}$$

រឺយ៉ាងខ្លី

$$M(f \circ g) = M(f)M(g) \tag{3.31}$$

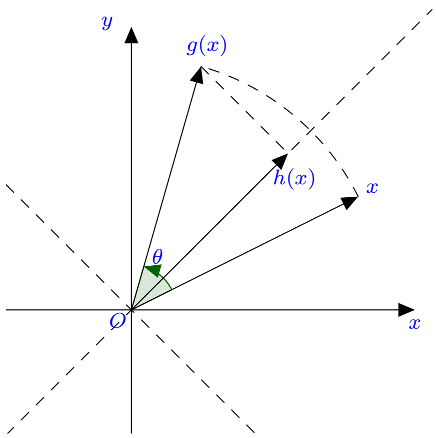
សំរាយបញ្ជាក់

យើងយក $x \in E$ ។ ដោយប្រើសំណើ 3.6 យើងបាន

$$\begin{aligned} M(f \circ g)M(x) &= M\left((f \circ g)(x)\right) = M\left(f(g(x))\right) \\ &= M(f)M(g(x)) = M(f)M(g)M(x) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ យើងបាន $M(f \circ g) = M(f)M(g)$ ។

ឧទាហរណ៍ 3.30. ក្នុងប្លង់ $\mathbb{R}^2$ ប្រដាប់ដោយគោលកាណូនិក $\{e_1, e_2\}$ គេអោយចំណោល f លើកន្លះបន្ទាត់ពុះទីមួយស្របនឹងកន្លះបន្ទាត់ពុះទីពីរ និង បំលែងវិល g ផ្ចិត O មុំ θ ។ កំណត់ម៉ាទ្រីសនៃអនុវត្តន៍ h បណ្ដាក់នៃ g ដោយ f ។



រូប 3.8:

យើងបាន

$$\begin{aligned}M(h) &= M(f\circ g) = M(f)M(g)\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta+\sin\theta & -\sin\theta+\cos\theta\\ \cos\theta+\sin\theta & -\sin\theta+\cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

និយមន័យ និង កំណត់សរសេរ 3.5. ម៉ាទ្រីសការេ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ មួយហៅថាមានចំរាសបើមានម៉ាទ្រីស $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ដែល

$$AB = BA = I_n \tag{3.32}$$

ម៉ាទ្រីស B ត្រូវកំណត់សរសេរ A^{-1} ។
ដូច្នេះ យើងបាន

$$AB = BA = I_n \tag{3.33}$$

ម៉ាទ្រីសដែលគ្មានចំរាសហៅថាម៉ាទ្រីសទោល។

ឧទាហរណ៍ 3.31. គេមាន $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ ។
យើងបាន $AB = BA = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2$ ។
ដូច្នេះ A និង B ជាម៉ាទ្រីសច្រាសគ្នា *i.e.* $A^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ ។

ឧទាហរណ៍ 3.32. ម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ មិនមានចំរាស (ម៉ាទ្រីសទោល)។ ដោយហេតុថា បើវាមានចំរាស $B = \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ នោះ យើងបាន $AB = I$ ។ ដូច្នេះគេនឹងទទួលបាន

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

មានន័យថា

$$\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ដែលលទ្ធផលនេះផ្ទុយពីការពិត។

សំណើ 3.8. E និង E' ជាលំហវ៉ិចទ័រពីមានវិមាត្រ n ដូចគ្នាលើ $\mathbb{K}$ និង $\{e_i\}$ ជាគោលមួយនៃ E ហើយ $\{\varepsilon_j\}$ ជាគោលមួយនៃ E' ។
អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $f : E \to E'$ មួយជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ *i.e.* ជាអ៊ីសូមរភីសមួយ លុះត្រាតែ $M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$ មានចំរាស។
លើសពីនេះ

$$(M(f))^{-1}_{e_i,\varepsilon_j} = M(f^{-1})_{\varepsilon_i,e_j} \tag{3.34}$$

មានន័យថា

$$M(f^{-1}) = (M(f))^{-1} \tag{3.35}$$

សំរាយបញ្ជាក់
យើងមាន $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ ។ ដូច្នេះយើងបាន $M(f^{-1} \circ f)_{e_i,e_i} = M(\mathrm{id}_E)_{e_i,e_i}$ ។ តាមសំណើ 3.7 យើងបាន $M(f^{-1})_{\varepsilon_j,e_i} M(f)_{e_i,\varepsilon_j} = I_n$ ។
ដូចគ្នាដែរ យើងបាន $M(f)_{e_i,\varepsilon_j} M(f^{-1})_{\varepsilon_j,e_i} = I_n$ ។
ការគណនាចំរាសនៃម៉ាទ្រីសមួយ
មានវិធីសាស្ត្រផ្សេងគ្នាសំរាប់គណនាចំរាសនៃម៉ាទ្រីសមួយដែលយើងនឹងសិក្សា។ នៅពេលនេះ យើងចងចាំរបៀបខាងក្រោមដែលការប្រើប្រាសើរបសើរវាមានញឹកញាប់បើ។

យក $A \in \mathcal{M}_n(K)$ និង $x, x' \in \mathbb{K}^n$ ហើយ X និង X' ជាម៉ាទ្រីសជួរឈរតំណាង x និង x' រៀងគ្នាក្នុងគោលកាណូនិក $\mathbb{K}^n$ ។ យើងអោយសមីការម៉ាទ្រីស

$$X' = AX \tag{3.36}$$

បើ A មានចំរាស នោះ ដោយគុណអង្គទាំងពីរនៃ 3.36 នឹង A^{-1} គេទទួលបាន

$$X = A^{-1}X' \tag{3.37}$$

ដូច្នេះ A^{-1} ជាម៉ាទ្រីសទទួលបានដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ 3.36 ។

ឧទាហរណ៍ 3.33. គណនាចំរាសនៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ។
ដោយសរសេរសមីការម៉ាទ្រីស

$$X' = AX$$

ជាមួយនឹង $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ និង $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ ។
យើងបាន

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

សមីការសមូលនឹងប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x'_1 & = & x_1 & + & 2x_2 \\ x'_2 & = & x_1 & + & 3x_2 \end{array} \right.$$

ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធមានអញ្ញាត្តិ x_1 និង x_2 យើងបាន

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 3x'_1 & - & 2x'_2 \\ x_2 & = & -x'_1 & + & x'_2 \end{array} \right.$$

ដូច្នេះ យើងបានសមីការម៉ាទ្រីស

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X'$$

យើងទាញបាន $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ។

ឧទាហរណ៍ 3.34. ចំពោះ $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ និង គេយក $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ។ រកលក្ខខណ្ឌរវាង a, b, c, d ដើម្បីអោយ A មានចំរាស រួចរក A^{-1} ។
យើងសរសេរសមីការម៉ាទ្រីស $X' = AX$ ជាមួយនឹង $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ និង $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ ។
យើងបាន ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{cases} x'_1 = ax_1 + bx_2 \\ x'_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases}$$

បើ $a \neq 0$ យើងបាន

$$\begin{cases} x'_1 \qquad\qquad = ax_1 + bx_2 \\ -cx'_1 + ax'_2 = (ad-bc)x_2 \end{cases}$$

បើ $ad - bc \neq 0$ យើងបាន

$$\begin{cases} dx'_1 - bx'_2 = (ad-bc)x_1 \\ -cx'_1 + ax'_2 = (ad-bc)x_2 \end{cases}$$

រួច

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ad-bc}x'_1 - \dfrac{b}{ad-bc}x'_2 = x_1 \\ -\dfrac{c}{ad-bc}x'_1 + \dfrac{a}{ad-bc}x'_2 = x_2 \end{cases}$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ -\dfrac{c}{ad-bc}x'_1 & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

មានន័យថា

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} X' = X$$

ដូច្នេះ A មានចំរាសលុះត្រាតែ $ad - bc \neq 0$ និង យើងបានចំរាសនៃ A កំណត់ដោយ

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

កំណត់សរសេរ 3.2. គេកំណត់ $LG_n(\mathbb{K})$ សំណុំនៃម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n មានធាតុក្នុង និងមានចំរាស *i.e.*

$$LG_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), MM^{-1} = M^{-1}M = I_n\} \tag{3.39}$$

ម៉ាទ្រីសដែលគ្មានចំរាសហៅថាម៉ាទ្រីសទោល។

ដូច្នេះ យើងបាន

សំណើ និង និយមន័យ 3.3. សំណុំ $LG_n(\mathbb{K})$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីសមានទំរង់ជាក្រុមមួយ និង ហៅថាក្រុមលីនេអ៊ែរ។

3.7 ការប្តូរគោល

3.7.1 ម៉ាទ្រីសឆ្លងគោល

E ជាលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រ n ហើយ $\{e_1, \cdots, e_n\}$ និង $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ ជាគោលពីរនៃ E ។ យើងបានដឹងហើយថាវ៉ិចទ័រ e'_i ទាំងអស់សរសេរជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃវ៉ិចទ័រ e_i មានន័យថា

$$\begin{aligned}
e'_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \cdots + p_{n1}e_n \\
e'_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \cdots + p_{n2}e_n \\
&\vdots \\
e'_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \cdots + p_{nn}e_n
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ យើងអោយនិយមន័យខាងក្រោម៖

និយមន័យ 3.3. គេហៅថាម៉ាទ្រីសឆ្លងគោលពី $\{e_i\}$ ទៅ $\{e'_i\}$ ជាម៉ាទ្រីសកំណត់សរសេរដោយ $P_{e_i \to e'_i}$ ដែលជួរឈររបស់វាជាកុំប៉ូសង់នៃវ៉ិចទ័រ $\{e'_i\}$ ក្នុងគោល $\{e_i\}$ *i.e.*

$$P_{e_i \to e'_i} = ||e'_1, \cdots, e'_n||_{e_i} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

សំណើ 3.9. ម៉ាទ្រីសឆ្លងគោលកំណត់ក្នុងនិយមន័យ 3.3 ជាម៉ាទ្រីសដែល

$$P_{e_i \to e'_i} = M(\mathrm{id}_E)_{e'_i, e_i} \tag{3.41}$$

សំណើ 3.10. ម៉ាទ្រីសឆ្លងគោលជាម៉ាទ្រីសជានិច្ចកាលមានចំរាស និង គេបាន

$$(P_{e_i \to e'_i})^{-1} = M(\mathrm{id}_E)_{e'_i, e_i} \tag{3.42}$$

3.7.2 ទំនាក់ទំនងរវាងកុំប៉ូសង់នៃវ៉ិចទ័យមួយក្នុងគោលចាស់ និង គោលថ្មីតាមម៉ាទ្រីសឆ្លងគោល

សំណើ 3.11. x ជាវ៉ិចទ័រមួយនៃ E ហើយ $\{e_i\}$ និង $\{e'_i\}$ ជាគោលពីរនៃ E ។ យក $P = P_{e_i \to e'_i}$ ជាម៉ាទ្រីសប្តូរគោល និង $X = M(x)_{e_i}, X' = M(x)_{e'_i}$ ។
យើងបាន

$$X' = P^{-1}X \tag{3.43}$$

សំរាយបញ្ជាក់

យក $x \in E$ មានកុំប៉ូសង់ $(x_1, \cdots, x_n)$ ក្នុងគោល $\{e_i\}$ និងមានកុំប៉ូសង់ $(x'_1, \cdots, x'_n)$ ក្នុងគោល $\{e'_i\}$ ។

យើងបាន $X = M(x)_{e_i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ និង $X' = M(x)_{e'_i} = \begin{pmatrix} x'_i \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ ។
តាមសំណើ 3.7 រួច តាមសំណើ 3.3 យើងបាន

$$PX' = M(\mathrm{id}_E)_{e'_i,e_i} M(x)_{e'_i} = M(\mathrm{id}_E)_{e_i} = M(x)_{e_i} = X$$

តាមសំណើ 3.10 យើងទាញបាន $X' = P^{-1}X$ ។

ឧទាហរណ៍ 3.35. $\mathbb{R}^2$ ប្រដាប់ដោយគោលកាណូនិច $\{e_1, e_2\}$ និងគោល $\{e'_2, e'_2\}$ កំណត់ដោយ

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} e'_1 &=& 2e_1 &+& e_2 \\ e'_2 &=& 3e_1 &+& 2e_2 \end{array} \right. \tag{3.44}$$

គណនាកំប៉ូសង់នៃវ៉ិចទ័រ $x = 2e_1 + 3e_2$ ។

របៀបទី១ (វិធីសាស្ត្រម៉ាទ្រីស) ៖ យើងបាន $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ និង $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
។ ដោយអនុវត្តន៍រូបមន្ត 3.43 នៃសំណើ 3.11 យើងបាន

$$X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ដូច្នេះ យើងបាន $x = -5e'_1 + 4e'_2$ ។

របៀបទី២ (ការគណនាផ្ទាល់) ៖

យើងកំណត់ e_1 និង e_2 ជាអនុគមន៍នឹង e'_1 និង e'_2 ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (3.44) ។ ដូច្នេះ យើងបាន

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} e_1 &=& 2e'_1 &-& e'_2 \\ e_2 &=& -3e'_1 &+& 2e'_2 \end{array} \right.$$

ដូច្នេះ យើងអាចសរសេរ x ក្នុងគោល $\{e'_1, e'_2\}$

$$x = 2e_1 + 3e_2 = 2(2e'_1 - e'_2) + 3(-3e'_1 + 2e'_2) = -5e'_1 + 4e'_2$$

3.7.3 ទំនាក់ទំនងរវាងម៉ាទ្រីសនៃអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយក្នុងគោលចាស់ និង គោលថ្មីតាមម៉ាទ្រីសឆ្លងគោល

សំណើ 3.12. គេយក $f \in \mathcal{L}(E, E')$, $\{e_1, \cdots, e_n\}$, $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ ជាគោលពីរនៃ E និង $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p\}$, $\{\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_p\}$ គោលពីរនៃ E' ។
គេយក

$$A = M(f)_{e_i,\varepsilon_j},\ A' = M(f)_{e'_i,\varepsilon'_j},\ P = P_{e_i \to e'_i},\ Q = P_{\varepsilon_j \to \varepsilon'_j}$$

គេបាន

$$A' = Q^{-1}AP \tag{3.45}$$

សំរាយបញ្ជាក់
យក $x \in E$ ជាវ៉ិចទ័រមួយ។ តាមសំណើ 3.11 យើងបាន

$$M(f(x))_{\varepsilon'_j} = Q^{-1}M(f(x))_{\varepsilon_j} = Q^{-1}M(f)_{e_i,\varepsilon_j}M(x)_{e_i} = Q^{-1}AX$$

ដែល $X = M(x)_{e_i}$ ។
ម្យ៉ាងវិញទៀត បើ $X = M(x)_{e'_i}$ នោះ

$$M(f(x))_{\varepsilon'_j} = M(f)_{e'_i,\varepsilon'_j}M(x)_{e'_i} = A'X' = A'P^{-1}X$$

ដូច្នេះ $A'P^{-1}X = Q^{-1}AX$ ។
ដោយសារតែ x ជាវ៉ិចទ័រទូទៅ នោះ យើងបាន $A'P^{-1} = Q^{-1}A$ *i.e.* $A' = Q^{-1}AP$ ។

វិបាក 3.2.
$f : E \to E$ ជាអង់ដូមរភីសមួយនៃ E និង $\{e_1, \cdots, e_n\}$, $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ គោលពីរនៃ E ។ គេយក

$$A = M(f)_{e_i},\ A' = M(f)_{e'_i} \text{ និង } P = P_{e_i \to e'_i}$$

ដូច្នេះ គេបាន

$$A' = P^{-1}AP \tag{3.46}$$

និយមន័យ 3.4. ម៉ាទ្រីស A និង A' នៃ $\mathcal{M}_n(K)$ ហៅថាដូចគ្នា បើមានម៉ាទ្រីស $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ដែល

$$A' = P^{-1}AP \tag{3.47}$$

និយមន័យ 3.5. ម៉ាទ្រីសពីរដូចគ្នាតំណាងអង់ដូមរភីសដូចគ្នាក្នុងគោលផ្សេងគ្នា។

f ជាអង់ដូមរភីសនៃ $\mathbb{R}^3$ ដែលក្នុងគោលកាណូនិក $\{e_i\}$ ត្រូវបានតាងដោយម៉ាទ្រីស

$$A = M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

កំណត់ម៉ាទ្រីស A' ដែលតំណាង f ក្នុងគោល $\{e'_i\}$ ជាមួយនឹង

$$\begin{cases} e'_1 &=& (1,0,-1) \\ e'_2 &=& (0,1,1) \\ e'_3 &=& (1,0,1) \end{cases}$$

យើងបាន $A' = P^{-1}AP$ ជាមួយនឹង $P = ||e'_1, e'_2, e'_3||_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ។
ដូច្នេះ តាមសំណើ 3.10 យើងបាន $P^{-1} = P_{e'_i \longrightarrow e_i} = ||e_1, e_2, e_3||_{e'_i}$ ។ ដូច្នេះ យើងកំណត់ e_1, e_2, e_3 ក្នុងគោល $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ ។ យើងមាន

$$\begin{cases} e'_1 &=& e_1 & & & - & e_3 \\ e'_2 &=& & & e_2 & + & e_3 \\ e'_3 &=& e_1 & & & + & e_3 \end{cases}$$

ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការអញ្ញាតិ e_1, e_2, e_3 យើងបាន

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_3) \\ e_2 = \frac{1}{2}(e'_1 + 2e'_2 - e'_3) \\ e_3 = \frac{1}{2}(-e'_1 + e'_3) \end{cases}$$

ដូច្នេះ $P^{-1} = ||e_1, e_2, e_3||_{e'_i} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ។

ដោយធ្វើផលគុណ $A' = P^{-1}AP$ យើងបាន

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ចំណាំ 3.8. ដោយសារតែ $A' = M(f)_{e'_i}$, នោះយើងបាន $f(e'_1) = 2e'_1$, $f(e'_2) = 2e'_2$ និង $f(e'_3) = 4e'_3$ ដូចដែលគេផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយផ្ទាល់។

ដោយហេតុថា $f(e'_1) = f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3)$ ។ ដោយ $f(e_1) = 3e_1 + e_3$ និង $f(e_3) = e_1 + 3e_3$ ដូច្នេះ $f(e'_1) = 2e_1 - 2e_3 = 2e'_1$ ។

3.8 ទ្រឹស្តីនៃរ៉ង់

និយមន័យ 3.6. E ជាលំហវិចទ័រមួយ។

1. យក $\mathcal{F} = \{v_i\}_{i\in I}$ ជាគ្រួសារមួយនៃវិចទ័រនៃ E ។ គេហៅថារ៉ង់នៃគ្រួសារ ជាវិមាត្រនៃលំហវិចទ័របង្ករដោយវិចទ័រ $\{v_i\}_{i\in I}$ ។

2. យក $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K), A = ||c_1, \cdots, c_n||$ ដែល c_i ជាវិចទ័រជួរឈរនៃ A ($c_i \in K^p$) ។ ដែលហៅថារ៉ង់នៃ A ជារ៉ង់នៃគ្រួសារនៃវិចទ័រជួរឈរនៃ A មានន័យថា

$$\mathrm{Rg}\,||c_1, \cdots, c_n|| = \mathrm{Rg}\{c_1, \cdots, c_n\} = \dim[c_1, \cdots, c_n] \tag{3.48}$$

យើងសូមរំលឹកថា រ៉ង់នៃអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ f មួយជាវិមាត្រនៃរូបភាពនៃ f *i.e.*

$$\mathrm{Rg}\, f = \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

ដូច្នេះ សញ្ញាណទាំងនេះភ្ជាប់គ្នា និង យើងបានសំណើខាងក្រោម៖

សំណើ 3.13. E និង E' ជាលំហវិចទ័រពីរមានវិមាត្រកំណត់ និង $f \in \mathcal{L}(E, E')$ ។ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ និង $\{w_1, \cdots, w_1\}$ រៀងគ្នាជាគោលនៃ E និង E' ហើយ$A = M(f)_{v_i,w_j}$ ។

ដូច្នេះ យើងបាន

$$\mathrm{Rg}\, f = \mathrm{Rg}\, A \tag{3.49}$$

ដូច្នេះ ម៉ាទ្រីសពីរតំណាងអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរដូចគ្នាក្នុងគោលផ្សេងគ្នា មានរ៉ង់ស្មើគ្នា។ ជាពិសេស ម៉ាទ្រីសពីរដូចគ្នា មានរ៉ង់ស្មើគ្នា។

សំរាយបញ្ជាក់
យើងអោយអ៊ីសូមរភីសពីរ $u : \mathbb{K}^n \to E$ និង $v : \mathbb{K}^p \to E'$ ដែលអនុវត្តន៍គោលកាណូនិច $\{e_1, \cdots, e_n\}$ និង $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p\}$ លើ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ និង $\{w_1, \cdots, w_p\}$ រៀងគ្នា ($(e_i) = v_i$, $v(\varepsilon_j) = w_j$) ។ ដូច្នេះ អនុវត្តន៍ $h = v^{-1} \circ f \circ u : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ មាន A ជាម៉ាទ្រីសក្នុងគោលកាណូនិច។
ដូច្នេះ យើងបាន

$$\begin{aligned}\operatorname{Rg} A &= \operatorname{Rg}(||h(e_1), \cdots, h(e_n)||_{\varepsilon_j}) \\ &= \dim[h(e_1), \cdots, h(e_n)] \\ &= \dim(\operatorname{Im} h) \\ &= \operatorname{Rg} h\end{aligned}$$

ដោយសារតែ u និង v ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ នោះ $\operatorname{Rg} h = \operatorname{Rg} f$ ។

និយមន័យ 3.7. $A = (a_{ij})$ ជាម៉ាទ្រីសមួយនៃ $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ ។ គេហៅថាត្រង់ស្ពូហ្សេនៃ A ជាម៉ាទ្រីស ${}^tA = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ បានដោយការប្តូរគ្នាជួរដេក និង ជួរឈរនៃ A ។

ឧទាហរណ៍ 3.36. គេមាន $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ ។ យើងបាន ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ ។

ដូច្នេះ យើងបានសំណើខាងក្រោម៖

សំណើ 3.14. ចំពោះគ្រប់ម៉ាទ្រីស A គេបាន

$$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}({}^tA) \tag{3.50}$$

មានន័យថា រ៉ង់នៃម៉ាទ្រីសមួយស្មើនឹងរ៉ង់នៃគ្រួសារនៃវ៉ិចទ័រជួរដេក ។

ឧទាហរណ៍ 3.37. គណនារ៉ង់នៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ ។

តាមនិយមន័យ 3.6 យើងត្រូវគណនារ៉ង់នៃវ៉ិចទ័រជួរឈរដោយធ្វើជាថ្នាក់ម៉ាទ្រីស

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ប៉ុន្តែ តាមលក្ខណៈ 3.14 យើងត្រូវគណនារ៉ង់នៃម៉ាទ្រីសជួរដេក (មានន័យថាធ្វើជាថ្នាក់ម៉ាទ្រីស A ខ្លួនវា) ។ យើងឃើញថាជួរដេកទីបីជាផលបូកនៃជួរដេកទីមួយ និង ជួរដេកទីពីរ ដែលមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែររវាងគ្នា។ ដូច្នេះ យើងបាន $\operatorname{Rg} A = 2$ ។

3.9 លំហឌុយអាល់

និយមន័យ 3.8. គេហៅថាទំរង់លីនេអ៊ែរលើ E ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $f : E \to \mathbb{K}$ ។ សំណុំ $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$ នៃទំរង់លីនេអ៊ែរលើ E នឹងត្រូវកំណត់សរសេរ E^* និង ហៅថាលំហឌុយអាល់។

យើងបានឃើញហើយនៅវគ្គខាងលើថា បើ E ជាលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់ និង $\{e_i\}$ ជាគោលមួយនៃ E នោះសំណុំនៃទំរង់លីនេអ៊ែរលើ E ជាអនុវត្តន៍មានទំរង់៖

$$\begin{array}{rccc} f & : & E & \to & \mathbb{K} \\ & & x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n & \mapsto & a_1x_1 + \cdots + a_ne_n \end{array} \tag{3.51}$$

និង ម៉ាទ្រីសដែលតំណាង f ជាម៉ាទ្រីសជួរដេកមួយ៖

$$M(f)_{e_i,1} = (a_1, \cdots, e_n)$$

ដូច្នេះ យើងបានសំណើខាងក្រោម៖

សំណើ និង និយមន័យ 3.4. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយមានវិមាត្រ n និង $f \in E^*$ ដែល $f \neq 0$ ។ គេបាន

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = n - 1 \tag{3.52}$$

ស្នូលនៃ f ហៅថាអ៊ីពែរប្លង់នៃ E កំណត់ដោយ f ។

សំរាយបញ្ជាក់

យក $f \in E^*$ ជាទំរង់លីនេអ៊ែរមួយមិនសូន្យ។ គេបាន $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{K}$ ។ ដូច្នេះ

$$\dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$$

ដោយសារតែ $f \neq 0$ ។ គេបាន $\dim(\operatorname{Im} f) = 1$ រួច តាមទ្រឹស្តីបទ 3.2 គេបាន $\dim(\operatorname{Ker} f) = n - 1$ ។

ចំណាំ 3.9. បើ f កំណត់ដោយរូបមន្ត (3.51) នោះអ៊ីពែរប្លង់កំណត់ដោយ f ជាសំណុំនៃវ៉ិចទ័រ $x \in E$ ដែលកុំប៉ូសង់របស់វាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការលីនេអ៊ែរ៖

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \tag{3.53}$$

ដូច្នេះលំហនៃសំណុំចំលើយនៃប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរមួយជាប្រសព្វមួយនៃអ៊ីពែរប្លង់។

សំណើ 3.15 (គោលឌុយអាល់). E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយមានវិមាត្រកំណត់។ យើងបាន

$$\dim E = \dim E^* \tag{3.54}$$

និង ជាវិបាក E និង E^* អ៊ីសូមរនឹងគ្នា។

សំរាយបញ្ជាក់
តាមសំណើ 3.4 យើងបាន៖

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} E \times \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = \dim_{\mathbb{K}} E$$

ដូច្នេះ យើងបាន $\dim E = \dim E^*$ (មានវិមាត្រកំណត់និង ស្មើគ្នា) ។ តាមទ្រឹស្តីបទ 3.1 យើងទទួលបាន លំហ E និង E^* អ៊ីសូមរនឹងគ្នា។ ដូច្នេះមានអ៊ីសូមរភីសមួយពី E ទៅ E^* ។ ប៉ុន្តែអ៊ីសូមរភីសនេះមិនមែន កាណូនិច (ធម្មជាតិ)។ ក្នុងន័យនេះ អ៊ីសូមរភីសត្រូវបានសង់ឡើងអាស្រ័យនឹងការជ្រើសរើសនៃគោលមួយ នៃ E និង នៃគោលមួយនៃ E^* ។
អ្វីដែលគួរអោយកត់សំគាល់គឺបើគេជ្រើសរើសគោល $\{e_1,\cdots,e_n\}$ មួយនៃ E គេអាចសង់ជាលក្ខណៈ ធម្មជាតិ គោល $\{f_1,\cdots,f_n\}$ មួយនៃ E^* ។ ដូច្នេះអ៊ីសូមរភីសអាស្រ័យតែនឹងការជ្រើសរើសមួយក្នុង E ប៉ុណ្ណោះ។

ទ្រឹស្តីបទ 3.3. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រ n និង $\{e_1,\cdots,e_n\}$ ជាគោលមួយនៃ E ។ គេអោយគ្រួសារនៃ ទំរង់លីនេអ៊ែរ $\{f_1,\cdots,f_n\}$ កំណត់ដោយ

$$f_i(e_k) = \delta_{ik} \tag{3.55}$$

ដែល $\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{បើ} \quad i \neq k \\ 1 & \text{បើ} \quad i = k \end{cases}$ ហៅថានិម្មិតសញ្ញាក្រូនិចក័រ (*Kronecker*) ។
ដូច្នេះ គេបាន $\{f_1,\cdots,f_n\}$ ជាគោលមួយនៃ E^* ហៅថាគោលឌុយអាល់នៃ $\{e_1,\cdots,e_n\}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់
យើងសង្កេតឃើញថាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ f ពិតជាកំណត់ បើគេស្គាល់រូបភាពនៃគោលមួយ ព្រោះ តាមភាព លីនេអ៊ែរនៃ f គេបាន

$$f(x) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n)$$

ដូច្នេះ បើគេស្គាល់ $f(e_1),\cdots,f(e_n)$ នោះ f ត្រូវស្គាល់គ្រង់គ្រប់ x ។
ជាពិសេស និយមន័យខាងលើ ពិតជាកំណត់បាន f_i ។ និយាយអោយច្បាស់ បើ $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ គេ បាន

$$f_i(x) = x_1f_i(e_1) + \cdots + x_nf_i(e_n) = x_i$$

ដូច្នេះ f_i ជាអនុវត្តន៍ដែលទៅនឹងវ៉ិចទ័រ x បង្កើតបានកុំប៉ូសង់ទី i ក្នុងគោល $\{e_1,\cdots,e_n\}$ ។ ដើម្បីបង្ហាញថា $\{f_1,\cdots,f_n\}$ ជាគោលមួយ យើងចាំបាច់បង្ហាញថា វាជាគ្រួសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ព្រោះ $\dim_K E^* = n$ ។
ឧបមាថាមាន $\lambda_1,\cdots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ ដែល $\lambda_1f_1 + \cdots + \lambda_nf_n = \mathbf{0}$ ។
ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $x \in E$ យើងបាន

$$\lambda_1f_1(x) + \cdots + \lambda_nf_n(x) = \mathbf{0}$$

ជាពិសេស ដោយយក $x = e_k$ ចំពោះ $k = 1,\cdots,n$ យើងបាន

$$\lambda_1f_1(e_k) + \cdots + \lambda_kf_k(e_k) + \cdots + \lambda_nf_n(e_k) = \mathbf{0}$$

ដូច្នេះ $\lambda_k = 0$ ចំពោះ $k = 1,\cdots,n$ ។ គ្រួសារ $\{f_1,\cdots,f_n\}$ ពិតជាសេរី។

ឧទាហរណ៍ 3.38. $\{e_1, e_2, e_3\}$ ជាគោលនៃ $\mathbb{R}^3$ ដែល

$$e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (1,0,-1),\ e_3 = (0,1,1)$$

កំណត់គោលនៃ $(\mathbb{R}^3)^*$ ដែលជាគោលឌុយអាល់នៃ $\{e_1, e_2, e_3\}$ ។

យើងបាន

$$f_1(e_1) = 1,\ f_1(e_2) = 0,\ f_1(e_3) = 0$$

ចំពោះ $x = (x_1, x_2, x_3)$ យើងសរសេរ $f_1(x) = ax_1 + bx_2 + cx_3$ ។ យើងបាន

$$\begin{cases} a & + & b & + & c & = & 1 \\ a & & & - & c & = & 0 \\ & & b & + & c & = & 0 \end{cases}$$

ដោយដោះស្រាយ យើងបាន $a = 1, b = -1, c = 1$ មានន័យថា

$$f_1(x) = x_1 - x_2 + x_3$$

ដូចគ្នាដែរ ចំពោះ f_2 ដោយ យកលក្ខខណ្ឌ $f_2(e_1) = 0, f_2(e_2) = 1, f_2(e_3) = 0$ យើងបាន

$$\begin{cases} a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & & & - & c & = & 1 \\ a & - & b & + & c & = & 0 \end{cases}$$

រួច $a = 0, b = 1, c = -1$ ។
ដូច្នេះ

$$f_2(x) = x_2 - x_3$$

ជាចុងក្រោយ ចំពោះ f_3, យើងបាន $f_3(e_1) = 0, f_3(e_2) = 0, f_3(e_3) = 1$ រួច

$$\begin{cases} a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & & & - & c & = & 0 \\ & & b & + & c & = & 1 \end{cases}$$

និង ជាបន្ទាប់ $a = -1, b = 2, c = -1$ ។
ដូច្នេះ

$$f_3(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3$$

ដូច្នេះ សរុបមកវិញ គោលឌុយអាល់នៃ $\{e_1, e_2, e_3\}$ ត្រូវបានអោយដោយទំរង់លីនេអ៊ែរ f_1, f_2, f_3 កំណត់ដោយ

$$\begin{array}{rcrcrcr} f_1(x) & = & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ f_2(x) & = & & & x_2 & - & x_3 \\ f_3(x) & = & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \end{array}$$

ភាពមិនអាស្រ័យគ្នានៃទំរង់លីនេអ៊ែរ

គេអោយគ្រួសារនៃទំរង់លីនេអ៊ែរ $\{\varphi_1, \cdots, \varphi\}$ ។

យើងចង់ដឹងថាតើគ្រួសារនេះជាគ្រួសារសេរីរឺទេ មានន័យថា

$$\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_p\varphi_p = 0 \to \lambda_1 = 0, \cdots, \lambda_p = 0$$

ជាទូទៅ វិធីងាយជាងគេគឺបំបែកវ៉ិចទ័រ φ_i ទាំងអស់លើគោលមួយនៃ E^* និង ប្រើវិធីសាស្ត្រដែលយើងបានសិក្សាលំអិតនៅជំពូក 2 ។

ឧទាហរណ៍ 3.39. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ជាទំរង់លីនេអ៊ែរលើ $\mathbb{R}^4$ កំណត់ដោយ

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \varphi_1(x) & = & x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 \\ \varphi_2(x) & = & x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 \\ \varphi_3(x) & = & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 \end{array}$$

បង្ហាញថា $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ ជាគ្រួសារសេរីនៃ $(\mathbb{R}^4)^*$ ។

យក $\{e_1, \cdots, e_4\}$ ជាគោលកាណូនិចនៃ $\mathbb{R}^4$ និង $\{f_1, \cdots, f_4\}$ ជាគោលឌុយអាល់របស់វា។ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ យើងបាន $f_i(x) = x_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$។ ដូច្នេះ

$$\varphi_1(x) = f_1(x) - 3f_2(x) + 2f_3(x) - f_4(x)$$

មានន័យថា

$$\varphi_1(x) = (f_1 - 3f_2 + 2f_3 - f_4)(x)$$

ដូច្នេះ

$$\varphi_1 = f_1 - 3f_2 + 2f_3 - f_4$$

យើងបាន φ_1 មានកុំប៉ូសង់ $(1, -3, 2, -1)$ ក្នុងគោល $\{f_1, \cdots, f_4\}$ ។
ដូចគ្នាដែរ យើងបាន

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \varphi_2 & = & f_1 & + & 2f_2 & & & - & f_4 \\ \varphi_3 & = & 2f_1 & - & f_2 & + & 2f_3 & + & f_4 \end{array}$$

យើងប្រើវិធីសាស្ត្រជាតុរិល ដើម្បីធ្វើជាថ្នាក់ម៉ាទ្រីសបង្គរ

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{array} \end{array}$$

រួច

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \varphi_1^{(1)} = \varphi_1 \\ \varphi_2^{(1)} = \varphi_2 - \varphi_1 \\ \varphi_3^{(1)} = \varphi_3 - 2\varphi_1 \end{array} \end{array}$$

និង ជាបន្ទាប់

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \varphi_1^{(2)} = \varphi_1^{(1)} \\ \varphi_2^{(2)} = \varphi_2^{(1)} \\ \varphi_3^{(2)} = \varphi_3^{(1)} - \varphi_2^{(1)} \end{array} \end{array}$$

ដូច្នេះ $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ ជាគ្រួសារសេរីមួយ។

សំណើ និង និយមន័យ 3.5. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយលើកាយ $\mathbb{K}$ ។ យើងបានដឹងហើយថា លំហឌុយអាល់ E^* ក៏ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយលើកាយ $\mathbb{K}$ ។ ដូច្នេះ សំណុំនៃទំរង់លីនេអ៊ែរលើ E^* មានន័យថាជាលំឌុយអាល់នៃ E^* ក៏ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយលើកាយ $\mathbb{K}$ ដែរ។ លំហនេះហៅថាលំហទ្វេរឌុយអាល់ និងកំណត់សរសេរដោយ E^{**} មានន័យថា

$$E^{**} = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E^*, \mathbb{K}) \tag{3.56}$$

ក្នុងលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់ គេបាន

$$\dim_{\mathbb{K}} E^{**} = \dim_{\mathbb{K}} E^* = \dim_{\mathbb{K}} E \tag{3.57}$$

ដូច្នេះ ទាំង E^* និង E^{**} អ៊ីសូមរទៅនឹង E ។ ប៉ុន្តែនៅពេលនេះ យើងមានលក្ខណៈមួយប្រសើជាងមុន។

សំណើ 3.16. ក្នុងលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់ E^{**} អ៊ីសូមរភីសជាលក្ខណៈកាណូនិចទៅនឹង E ។

លក្ខណៈនេះមានន័យថាគេអាចសង់អ៊ីសូមរភីសមួយពី E ទៅ E^{**} ដោយមិនបាច់រំលឹកដល់ការជ្រើសរើសនៃគោល។ ដូច្នេះ នៅក្នុងលំហមានវិមាត្រកំណត់ គេអាចប្រដូច E ជាមួយនឹង E^{**} ។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងអោយអនុវត្តន៍

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & E & \to & E^{**} \\ & x & \mapsto & \varphi_x \end{array}$$

ដែល φ_x ជាអនុវត្តន៍

$$\begin{array}{rccc} \varphi_x: & E^* & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

ជាដំបូង យើងបង្ហាញថា ចំពោះ x ថេរនៃ E អនុវត្តន៍ φ_x ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ ($\varphi_x \in \mathcal{L}_K(E^*, K) = E^{**}$) ។

ចំពោះ$f_1, f_2 \in E^*$ យើងបាន

$$\varphi_x(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi_x(f_1) + \varphi_x(f_2)$$

និង ចំពោះ $f \in E^*$ និង $\lambda \in \mathbb{K}$ យើងបាន

$$\varphi_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda(f(x)) = \lambda\varphi_x(f)$$

ដូច្នេះ $\varphi_x \in E^{**}$ ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត ϕ ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ។ ដោយហេតុថា ចំពោះ $x, y \in E$ និង $f \in E^*$ យើងបាន

$$\varphi_{x+y}(f) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \varphi_x(f) + \varphi_y(f) = (\varphi_x + \varphi_y)(f)$$

ដោយសារតែ f ជាធាតុទូទៅនៃ E^* យើងបាន $\varphi_{x+y} = \varphi_x + \varphi_y$ ។

ដូចគ្នាដែរ បើ $\lambda \in \mathbb{K}$ និង $f \in E^*$ យើងបាន

$$\varphi_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\varphi_x(f)$$

មានន័យថា $\varphi_{\lambda x} = \lambda\varphi_x$

ដូច្នេះ φ ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ។

យើងនៅតែបង្ហាញថា φ ជាអ៊ីសូមរភីសមួយ។ ដើម្បីបង្ហាញដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា φ ជាអនុវត្តន៍ប្រកានើ ព្រោះ យើងបានដឹងហើយថា $\dim E = \dim E^{**}$ ។
យក $x \in E$ ដែល $\varphi_x = 0$ ។ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $x = \mathbf{0}$ ។ ត្បិតតែ $\varphi_x = 0$ យើងបាន ចំពោះគ្រប់ $f \in E^*$ $\varphi_x(f) = 0$ ។ យក $\{e_1, \cdots, e_n\}$ ជាគោលមួយនៃ E និង $\{f_1, \cdots, f_n\}$ ជាគោលឌុយអាល់មួយ។ ដោយសារតែ $f_i \in E^*$ យើងបាន $\varphi_x(f_i) = 0$ *i.e.* $f_i(x) = 0$ ចំពោះ $i = 1, \cdots, n$ ។ ប៉ុន្តែ $f_i(x)$ ជាកុំប៉ូសង់ទី i នៃ x ក្នុងគោល $\{e_1, \cdots, e_n\}$ ។ ដូច្នេះ x មានកុំប៉ូសង់សូន្យទាំងអស់ *i.e.* $x = \mathbf{0}$ ។

ចំណាំ 3.10. ក្នុងលំហវិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់ គេអាចបង្ហាញថា φ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ប៉ុន្តែមិនចាំបាច់ពេញ។ ដូច្នេះ បើវិមាត្រនៃលំហវិចទ័រ E មិនកំណត់ ជាទូទៅ E មិនអ៊ីសូមរនឹង E^{**} ប៉ុន្តែ វាអ៊ីសូមរតែទៅនឹងរូបភាពរបស់វាដោយ φ ។

3.10 លំហនៃទំរង់លីនេអ៊ែរសូន្យ

សំណើ និង និយមន័យ 3.6. E ជាលំហវិចទ័រមួយ និង ជាលំហវិចទ័ររងនៃ E ។ សំណុំ F° នៃទំរង់លីនេអ៊ែរលើ E ដែលសូន្យលើ F ៖

$$F^\circ = \{f \in E^* \mid f(v) = 0 \quad \forall v \in F\} \tag{3.58}$$

ជាលំហវិចទ័ររងមួយនៃលំហវិចទ័រ E^* ហៅថាលំហនៃទំរង់លីនេអ៊ែរសូន្យនៃ F ។

សំរាយបញ្ជាក់

1. ជាការពិតណាស់ $\mathbf{0} \in E^*$ ព្រោះ $\mathbf{0}(v) = 0$ ចំពោះគ្រប់ $v \in E$ ។ ដូច្នេះ $\mathbf{0}(v) = 0$ ចំពោះគ្រប់ $v \in F$ ។
2. យក $f_1, f_2 \in F^\circ$ ។ ចំពោះគ្រប់ $v \in F$ យើងបាន $(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v) = 0$ *i.e.* $f_1 + f_2 \in F^\circ$ ។
3. យក $f \in F^\circ$ និង $\lambda \in \mathbb{K}$ ។ ចំពោះគ្រប់ $v \in F$ យើងបាន $(\lambda f)(v) = \lambda f(v) = 0$ *i.e.* $\lambda f \in F^\circ$ ។

សំណើ 3.17. E ជាលំហវិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់ និង F ជាលំហវិចទ័ររងនៃ E ។ យើងបាន

$$\dim E = \dim F + \dim F^\circ \tag{3.59}$$

សំរាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា $\dim E = n$ និង $\{v_1, \cdots, v_p\}$ ជាគោលមួយនៃ F ។ យើងបំពេញគោលនេះដើម្បីបានគោលមួយនៃ E ដែលយើងតាងដោយ $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_p, v_{p+1}, \cdots v_n\}$ ។ យក $\{f_1, , f_2, \cdots f_n\}$ ជាគោលឌុយអាល់។ យើងបង្ហាញថា $\{, f_{p+1}, \cdots f_n\}$ ជាគោលមួយនៃ $\dim F^\circ$ ។
ជាដំបូង តាមនិយមន័យនៃគោលឌុយអាល់ យើងបាន $f_{p+1}, \cdots f_n \in \dim F^\circ$ ព្រោះ $f_k(v_1) = 0, \cdots, f_k(v_p) = 0$ ចំពោះ $k = p+1, \cdots, n$ ។
ម៉្យាងវិញទៀត $\{f_{p+1}, \cdots, f_n\}$ ជាគ្រួសារសេរីមួយ ព្រោះវាជាគ្រួសារទាញចេញពីគោលមួយ។ យើងនៅសល់

តែបង្ហាថាគ្រួសារ $\{f_{p+1}, \cdots, f_n\}$ បង្ករ $\dim F^\circ$ ។
យក $f \in F^\circ$ ។ យើងបង្ហាញថាមាន $\lambda_{p+1}, cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ដែល

$$f = \lambda_{p+1} f_{p+1} + \cdots + \lambda_n f_n$$

យក $x \in E$ យើងអាចសេសេរ $x = x_1 v_1 + \cdots + x_p v_p + x_{p+1} v_{p+1} + \cdots + x_n v_n$ ។ ដោយសារតែ $v_1, \cdots, v_p \in F$ និង $f \in F^\circ$ យើងបាន

$$f(x) = x_{p+1} f(v_{p+1}) + \cdots + x_n f(v_n)$$

ដោយយក $f(v_{p+1}) = \lambda_{p+1}, \cdots, f(v_n) = \lambda_n,$ យើងបាន

$$f(x) = \lambda_{p+1} x_{p+1} + \cdots + \lambda_n x_n$$

ដោយសារតែ $\{f_1, \cdots, f_n\}$ ជាគោលឌុយអាល់ នោះ $f_i(x) = x_i$ ចំពោះគ្រប់ $i = 1, 2, \cdots, n$ ។ យើងទាញបាន ចំពោះគ្រប់ $x \in E$

$$f(x) = \lambda_{p+1} f_{p+1}(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x)$$

ដូច្នេះ យើងបាន $f = \lambda_{p+1} f_{p+1} + \cdots + \lambda_n f_n$ ។

ឧទាហរណ៍ 3.40. កំណត់លំហនៃទំរង់លីនេអ៊ែរសូន្យ F° នៃលំហវ៉ិចទ័ររង F នៃ $\mathbb{R}^5$ បង្ករដោយវ៉ិចទ័រ $v_1 = (1, 3, -2, 2, 3), v_2 = (1, 4, -3, 4, 2), v_3 = (2, 3, -1, -2, 9)$ ។

ជាដំបូង យើងទាញយកគោលមួយនៃ $\{v_1, v_2, v_3\}$ ៖

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

ដោយធ្វើប្រមាណវិធីតាមជួរដេក យើងបាន

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1^{(1)} = v_1 \\ v_2^{(1)} = v_2 - v_1 \\ v_3^{(1)} = v_3 - 2v_1 \end{array}$$

រួច

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1^{(2)} = v_1^{(1)} \\ v_2^{(2)} = v_1^{(1)} \\ v_3^{(2)} = v_3^{(1)} - 3v_2^{(1)} \end{array}$$

ដូច្នេះ យើងបាន វ៉ិចទ័រ $v_1 = (1, 3, -2, 2, 3)$ និង $v_2^{(2)} = (0, 1, -1, 2, -1)$ បង្កើតមានគោលមួយនៃ F ។
យើងសូមរំលឹកថា $F^\circ = \{f \in E^* \mid f(v_1) = 0, f(v_2^{(2)}) = 0\}$ ។
តាមសំណើ 3.17 យើងបាន $\dim F^\circ = 5 - 2 = 3$ ។
ដូច្នេះ យើងនឹងកំណត់ទំរង់លីនេអ៊ែរបីមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នាដែលសូន្យលើ v_1 និង $v_2^{(2)}$ ។
យើងយក $f(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_5 x_5$ ជាទំរង់លីនេអ៊ែរមួយ។ តាមលក្ខខណ្ឌ $f(v_1) = 0$ យើងបាន $a_1 +$

$3a_2 - 2a_3 + 2a_4 + 3a_5 = 0$ និង តាមលក្ខខណ្ឌ $f(v_2^{(2)}) = 0$ យើងបាន $a_2 - a_3 + 2a_4 - a_5 = 0$ ។
ដូច្នេះ យើងត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការអូមូហ្សែន

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 - 2a_3 + 2a_4 + 3a_5 = 0 \\ \qquad a_2 - a_3 + 2a_4 - a_5 = 0 \end{cases}$$

ប្រព័ន្ធសមីការមានទំរង់ជាថ្នាក់ស្រាប់។ a_3, a_4, a_5 ជាអថេរសេរី។ ដូច្នេះ យក $\lambda,\, \mu,\, \nu \in \mathbb{R}$ យើងបាន

$$a_1 = -\lambda + 4\mu - 6\nu,\, a_2 = \lambda - 2\mu + \nu,\, a_3 = \lambda,\, a_4 = \mu,\, a_5 = \nu$$

ដូច្នេះ $F^\circ = \{(-\lambda + 4\mu - 6\nu, \lambda - 2\mu + \nu, \lambda, \mu, \nu), \lambda,\, \mu,\, \nu \in \mathbb{R}\}$ ។
យើងចង់បានទំរង់លីនេអ៊ែរបីមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា យើងចាំបាច់អោយទៅនឹងត្រីធាតុ $(\lambda,\, \mu,\, \nu)$ រៀងគ្នា $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ រួចយើងទទួលបាន

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1(x) & = & -x_1 + x_2 + x_3 \\ \varphi_2(x) & = & 4x_1 - 2x_2 + x_4 \\ \varphi_3(x) & = & -6x_1 + x_2 + x_5 \end{array}$$

លំហាត់

លំហាត់ 3.1. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយលើកាយ $\mathbb{K}$ ។ យក $x_0 \in E$ និង $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ ។ បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ខាងក្រោមជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ

1. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{K} & \to & E \\ & & \lambda & \mapsto & \lambda x_0 \end{array}$

2. $\begin{array}{rccc} f & : & E & \to & E \\ & & x & \mapsto & \lambda_0 x \end{array}$

លំហាត់ 3.2. ក្នុងចំណោមអនុវត្តន៍ខាងក្រោម តើមួយណាជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ និងមួយណាមិនលីនេអ៊ែរ ?

1. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & a \end{array}$
   ដែល a ជាចំនួនពិតដែលអោយ។

2. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$

3. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & |x| \end{array}$

4. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & ax \end{array}$
   ដែល a ជាចំនួនពិតដែលអោយ។

5. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & ax+b \end{array}$
   ដែល a និង b ជាចំនួនពិតពីរដែលអោយ។

6. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & ax^2 \end{array}$
   ដែល a ជាចំនួនពិតដែលអោយ។

7. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^x \end{array}$

8. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$

9. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ & & z & \mapsto & |z| \end{array}$

10. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & az \end{array}$
    ដែល $a \in \mathbb{C}$ ។

11. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & x+2y \end{array}$

12. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & 3x-2y+1 \end{array}$

13. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & ax+by \end{array}$
ដែល $a,b \in \mathbb{R}$ ។

14. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & ax+by+c \end{array}$
ដែល $a,b,c \in \mathbb{R}$ ។

15. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & x^2+3y^2+4x+2y \end{array}$

16. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & x^2+xy+y^2 \end{array}$

17. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f \end{array}$
ដែល $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$ ។

18. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1,x_2,\cdots,x_n) & \mapsto & c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \end{array}$
ដែល $c_1,c_2,\cdots,c_n \in \mathbb{R}$ ។

19. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x+y,x-y) \end{array}$

20. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (2x+y,-x+2y) \end{array}$

21. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (ax+by,cx+dy) \end{array}$
ដែល $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ។

22. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x^2+y^2,x^2-y^2) \end{array}$

23. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x+y,xy) \end{array}$

24. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x,x+y,y) \end{array}$

25. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y) & \mapsto & (ax+by,cx+dy,ex+fy) \end{array}$
ដែល $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$ ។

26. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x+y,x,y,x-y) \end{array}$

27. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y+z) \end{array}$

28. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y+z, z+x) \end{array}$

29. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & & (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \mapsto & (x_1+x_n, x_2+x_n, \cdots, x_n+x_n) \end{array}$

30. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & & (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \mapsto & (x_1+x_2, x_2+x_3, \cdots, x_n+x_1) \end{array}$

31. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ & & p(\cdot) & \mapsto & p(\cdot+h)-p(\cdot) \end{array}$
ដែល $h>0$ ។

32. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}_3[x] \\ & & p(t) & \mapsto & t^3p(0)+t^2p'(0)+tp''(0) \end{array}$

33. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}_3[x] \\ & & p(t) & \mapsto & tp(t) \end{array}$

34. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_1[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ & & p(t) & \mapsto & tp(t)+1 \end{array}$

35. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_3[x] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & p & \mapsto & (p(-1), p(0), p(1)) \end{array}$

36. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_3[x] \\ & & (a,b,c,d) & \mapsto & ax^3+bx^2+cx+d \end{array}$

37. $\begin{array}{cccc} f & : & C([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b \varphi(t)f(t)dt \end{array}$
ដែល $\varphi \in C([a,b])$ ។

38. $\begin{array}{cccc} f & : & C([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b \varphi(t)|f(t)|dt \end{array}$
ដែល $\varphi \in C([a,b])$ ។

39. $\begin{array}{cccc} f & : & C([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b \varphi(t)\sin\left(f(t)\right)dt \end{array}$
ដែល $\varphi \in C([a,b])$ ។

40. $f \quad f \mapsto \displaystyle\int_a^x \varphi(t)f(t)dt$
ដែល $\varphi \in C([a,b])$ ។

41. $$\begin{array}{rccc} f & : & C([a,b]) & \to & C([a,b]) \\ & & f & \mapsto & \displaystyle\int_a^x \varphi(t)e^{f(t)}dt \end{array}$$

42. $$\begin{array}{rccc} f & : & C([a,b]) & \to & C([a,b]) \\ & & f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b \varphi(t)f(x+t)dt \end{array}$$
ដែល $\varphi \in C([a,b])$ ។

43. $$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{K}^{n\times 1} & \to & \mathbb{K}^{m\times 1} \\ & & x & \mapsto & Ax \end{array}$$
ដែល $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ។

44. $$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{K}^{n\times 1} & \to & \mathbb{K}^{m\times 1} \\ & & x & \mapsto & Ax+b \end{array}$$
ដែល $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ និង $b \in \mathbb{K}^{m\times 1}$ ។

45. $$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{K}^{n\times n} & \to & \mathbb{K}^{m\times n} \\ & & X & \mapsto & AX \end{array}$$
ដែល $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ។

46. $$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{K}^{n\times n} & \to & \mathbb{K}^{n\times n} \\ & & X & \mapsto & AX+B \end{array}$$
ដែល $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ។

47. $$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{K}^{n\times n} & \to & \mathbb{K}^{n\times n} \\ & & X & \mapsto & AXB \end{array}$$
ដែល $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ។

48. $$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{K}^{n\times n} & \to & \mathbb{K}^{n\times n} \\ & & X & \mapsto & AX-XA \end{array}$$
ដែល $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ។

49. $$\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{a+d}{2}I + \dfrac{b+c}{2}J \end{array}$$
ដែល $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ និង $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ។

50. $$\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (a+b+c+d)I \end{array}$$
ដែល $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ។

លំហាត់ 3.3. កំណត់អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ f ដែល ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងដែលអោយ៖

1. $f \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ និងចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$, $f(2013x) = x$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ និងចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$, $f(2013x+1) = x + \dfrac{1}{2013}$

4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ និងចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y, x-y) = x+y$

5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ និងចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$, $f(2x+3y, 3x-2y) = (y, x)$

លំហាត់ 3.4. តើបំលែងខាងក្រោមជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរឬទេ ?

1. បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសកំណត់ដោយ

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x,-y) \end{array}$$

2. បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងបន្ទាត់សមីការ $y = y_0$ កំណត់ដោយ

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x,2y_0-y) \end{array}$$

3. បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេកំណត់ដោយ

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (-x,y) \end{array}$$

4. បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងបន្ទាត់សមីការ $x = x_0$ កំណត់ដោយ

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (2x_0-x,y) \end{array}$$

5. បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងផ្ចិត O កំណត់ដោយ

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (-x,-y) \end{array}$$

6. បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងផ្ចិត $M_0(x_0, y_0)$ កំណត់ដោយ

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (2x_0-x,2y_0-y) \end{array}$$

7. បំលែងកិលតាមវ៉ិចទ័រ $\vec{t} = (x_0, y_0)$ កំណត់ដោយ

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+x_0,y+y_0) \end{array}$$

8. បំលែងវិលផ្ចិត O មុំ θ កំណត់ដោយ

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \end{array}$$

9. បំលែងកិលតាមវ៉ិចទ័រ $\vec{t} = (x_0, y_0)$ រួចបំលែងវិលផ្ចិត O មុំ θ កំណត់ដោយ

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x\cos\theta - y\sin\theta + x_0, x\sin\theta + y\cos\theta + y_0) \end{array}$$

10. បំលែងចាំងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ផលធៀប k កំណត់ដោយ

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (kx, y) \end{array}$$

11. បំលែងចាំងអ័ក្សអរដោនេ ផលធៀប k កំណត់ដោយ

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x, ky) \end{array}$$

12. បំលែងចាំងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ផលធៀប k និងអ័ក្សអរដោនេ ផលធៀប k' កំណត់ដោយ

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (kx, k'y) \end{array}$$

លំហាត់ 3.5. យក $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរដែល $f(1) = 1, f(t) = t^2$ និង $f(t^2) = t^3 + t$ ។

1. កំណត់ $f(2t^2 - 5t + 3)$ ។
2. កំណត់ $f(at^2 + bt + c)$ ។

លំហាត់ 3.6. អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ

$$f(p) = \int_0^1 p(x)dx$$

1. កំណត់ $\mathrm{Ker}(f)$ ។
2. កំណត់ $\dim \mathrm{Ker}(f)$ ។
3. តើ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់រឺទេ ?

លំហាត់ 3.7. អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ កំណត់ដោយ

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. តើ f ជាអនុវត្តន៍ពេញរឺទេ ?
2. កំណត់គោលមួយនៃ $\mathrm{Im}(f)$ ។
3. កំណត់ $\dim \mathrm{Ker}(f)$ ។
4. តើ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់រឺទេ ?

លំហាត់ 3.8. អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ កំណត់ដោយ

$$f(ax^2 + bx + c) = (a + 2b)x + b + c$$

1. កំណត់គោលមួយនៃ $\mathrm{Ker}(f)$ ។
2. កំណត់គោលមួយនៃ $\mathrm{Im}(f)$ ។
3. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\dim \mathbb{R}_2[x] = \mathrm{Rg}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f)$ ។

លំហាត់ 3.9. អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ កំណត់ដោយ

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ a+d & b+d \end{pmatrix}$$

1. កំណត់គោលមួយនៃ $\mathrm{Ker}(f)$ ។
2. កំណត់គោលមួយនៃ $\mathrm{Im}(f)$ ។

លំហាត់ 3.10. អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ កំណត់ដោយ

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

1. កំណត់គោលមួយនៃ $\mathrm{Ker}(f)$ ។
2. កំណត់គោលមួយនៃ $\mathrm{Im}(f)$ ។

លំហាត់ 3.11. អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ កំណត់ដោយ

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. បង្ហាញថា f មានចំរាស។
2. កំណត់ $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ ។

លំហាត់ 3.12. អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ កំណត់ដោយ

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1. បង្ហាញថា f មានចំរាស។
2. កំណត់ $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$ ។

លំហាត់ 3.13. E និង E' ជាលំហវ៉ិចទ័រពីរមានវិមាត្រកំណត់ ហើយ $f : E \to E'$ ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ ។

1. បង្ហាញថា $\mathrm{Rg}(f) \leq \dim E$ ។
2. បើ f ជាអនុវត្តន៍ពេញ បង្ហាញថា $\dim E' \leq \dim E$ ។

លំហាត់ 3.14. គេមាន $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ និង $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ កំណត់ដោយ $f(x) = Ax$ ។ បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍ពេញលុះត្រាតែមើ $\mathrm{Rg}(A) = m$ ។

លំហាត់ 3.15. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ កំណត់ដោយ

$$f(x, y, z) = (13x - 8y - 12z, 12x - 7y - 12z, 6x - 4y - 5z)$$

គេយក $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^3,\ f(u) = u\}$ និង $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^3,\ f(u) = -u\}$ ។

1. បង្ហាញថា F_1 និង F_2 ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathbb{R}^3$ និង កំណត់វិមាត្ររបស់វា។
2. បង្ហាញថា F_1 និង F_2 បំពេញគ្នាក្នុង $\mathbb{R}^3$ ។

លំហាត់ 3.16. ចំពោះអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ f ខាងក្រោម កំណត់ $\mathrm{Ker}(f)$ និង $\mathrm{Im}(f)$ ។ ទាញថាតើ f ជាអនុវត្តន៍ពេញ ប្រកាន់ មួយទល់មួយ។

1. $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$
2. $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$
3. $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, 0) \end{array}$
4. $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-y+z) \end{array}$
5. $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y, x, y, x+y) \end{array}$

6. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_3[x] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & p & \mapsto & (p(-1), p(0), p(1)) \end{array}$

7. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & M & \rightarrow & AM - MA \end{array}$

8. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_3[x] & \rightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ & & p(x) & \mapsto & (x^2-1)p''(x) + p(x) \end{array}$

9. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (b+c)I \end{array}$

ដែល $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ។

10. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{array}$

លំហាត់ 3.17. $E = \mathbb{R}_n[x]$ ជាលំហវ៉ិចទ័រនៃពហុធាដែលមានដឺក្រេតូចជាង រឺស្មើនឹង n និង $f : E \rightarrow E$ កំណត់ដោយ $f(p(x)) = p(x) + (1-x)p'(x)$ ។
បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ រួច អោយ $\mathrm{Im}(f)$ និង $\mathrm{Ker}(f)$ ។

លំហាត់ 3.18. គេមាន $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ និង អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & M & \rightarrow & AM - MA \end{array}$$

ចូរអោយគោលមួយនៃរូបភាពនៃ f ។

លំហាត់ 3.19. គេអោយអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z,t) & \rightarrow & (2x+y+z, x+y+t, x+z-t) \end{array}$$

ចូរអោយគោលមួយនៃស្នូល និង រូបភាពនៃ f ។

លំហាត់ 3.20. តើអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរខាងក្រោមជាអ៊ីសូមរភីសរឺទេ ?

1. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \rightarrow & (x-z, 2x+y-4z, -y+2z) \end{array}$

2. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_2[x] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ & & p & \rightarrow & p + p' \end{array}$

3. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ & & (a,b,c) & \rightarrow & (2a+b)x^2 - (a+b+c)x + 3a - 2b + 5c \end{array}$

4. $$\begin{array}{cccc} f & : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \frac{a+d}{2}I + \frac{b+c}{2}J \end{array}$$
ដែល $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ និង $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ។

លំហាត់ 3.21. យក $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$ និង $\{v_1, v_2, v_3\}$ និង $\{w_1, w_2\}$ ជាគោលនៃ $E = \mathbb{R}^3$ និង $F = \mathbb{R}^2$ រៀងគ្នា។ គេកំណត់ $\varphi : E \to F$ ដោយ

$$\varphi(v_1) = 2w_1 + 2w_2,\ \varphi(v_2) = w_1 + 2w_2 \text{ និង } \varphi(v_3) = 4w_1 + 4w_2$$

1. កំណត់រ៉ង់នៃ φ ។
2. កំណត់វិមាត្រនៃ $\operatorname{Ker}\varphi$ ។ កំណត់ស្នូលនៃ φ ។
3. គេអោយ $a = (3, 1, 0)$ និង $b = (6, 2, 1)$ នៃ E ។ កំណត់វិមាត្រនៃ $Vect\{\varphi(a), \varphi(b)\}$ ។

លំហាត់ 3.22. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្របី និង $\{e_1, e_2, e_3\}$ ជាគោលមួយនៃ E ហើយ λ ជាធាតុនៃ $\mathbb{K}$ ។ បង្ហាញថា អនុវត្តន៍ φ កំណត់ដោយ

$$\varphi(e_1) = e_1 + e_2,\ \varphi(e_2) = w_1 - w_2 \text{ និង } \varphi(e_3) = e_1 + \lambda e_3$$

ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ។ កំណត់បំលែងនៃវ៉ិចទ័រ $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ ។ តើត្រូវជ្រើសរើស λ យ៉ាងណាដើម្បីអោយ φ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ? φ ជាអនុវត្តន៍ពេញ ?

លំហាត់ 3.23.
1. កំណត់អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ មួយដែល $\operatorname{Im} f$ បង្ករដោយ $\{(1, 2), (2, 4)\}$ ។
2. កំណត់អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ មួយដែល $\operatorname{Ker} f$ បង្ករដោយ $\{(0, 7, 1), (-1, 1, 0)\}$ ។

លំហាត់ 3.24. បង្ហាញថាមានអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយទល់មួយ មួយពី $\mathbb{R}^3$ ទៅ $\mathbb{R}_2[x]$ ។

លំហាត់ 3.25. E និង F ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ និង $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ។ គេកំណត់

$$\begin{array}{cccc} L & : & E \times F & \to & E \times F \\ & & (x, y) & \mapsto & (x, y - f(x)) \end{array}$$

បង្ហាញថា L ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ រួចកំណត់ $\operatorname{Ker}(L)$ និង $\operatorname{Im}(L)$ ។

លំហាត់ 3.26. E ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ បង្ករដោយ $(x) \mapsto \cos(x)$, $(x) \mapsto \cos(2x)$, $(x) \mapsto \sin(x)$ និង $(x) \mapsto \sin(2x)$ ។
គេកំណត់ $f : E \to E \times E$ ដោយ $f(u) = u'' + 4u$ ។

1. បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ។
2. កំណត់ $\operatorname{Ker}(f)$ និង គោលមួយនៃ $\operatorname{Ker}(f)$ ។

3. តើ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់រឺទេ? ពេញរឺទេ?

4. រកវិមាត្រនៃ $\mathrm{Im}(f)$ ។

លំហាត់ 3.27. $E = \mathbb{R}_2[x$ និង $f : E \to E$ ដែល $Q(x) = P(x) + (1-x)P'(x)$ ។

1. បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ។

2. កំណត់ $\mathrm{Ker}(f)$ និង គោលមួយនៃ $\mathrm{Ker}(f)$ ។

3. ចំពោះ $P \in E$ តើមាន $P_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ និង $P_2 \in \mathrm{Im}(f)$ ដែល $P = P_1 + P_2$ រឺទេ? បើមាន តើ P_1 និង P_2 ជាធាតុតែមួយរឺទេ?

លំហាត់ 3.28. គេអោយអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ កំណត់ដោយ λ ដើម្បីអោយ $f(x,y,z) = (x,x,x)$ និង អនុវត្តន៍ $g_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ កំណត់ដោ $g_\lambda(x,y,z) = (x,y,\lambda - x - y)$ ។

1. កំណត់ដោយ λ ដើម្បីអោយ g_λ លីនេអ៊ែរ។

2. បង្ហាញថា $\mathrm{Im}(f)$ និង $\mathrm{Im}(g_0)$ ជាលំហបំពេញគ្នា។

លំហាត់ 3.29. គេយក $E = \mathbb{R}_2[x]$ និង $f(p) = (x^2+x+1)p'' + x^2p' - 2xp$

1. ចូរបញ្ជាក់ថាបើ p ជាធាតុនៃ E នោះ $f(p)$ ក៏ជាធាតុនៃ E ដែរ។

2. បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ។

3. ចូរអោយម៉ាទ្រីសនៃ f ក្នុងគោលកាណូនិច។

4. យក $\mathcal{C} = (x, x^2, x^2+x+1)$ ។ ចូរបញ្ជាក់ថា $\mathcal{C}$ ជាគោលមួយនៃ E និងបញ្ចាំម៉ាទ្រីសនៃ f ក្នុងគោល $\mathcal{C}$ ។

លំហាត់ 3.30. យក $E = \mathbb{R}_n[x]$ និង $\varphi : p \mapsto (x+n)p(x) - xp(x+1)$

1. ចូរសរសេរម៉ាទ្រីសនៃ f ក្នុងគោលកាណូនិច។

2. កំណត់ស្នូលនៃ f ។

លំហាត់ 3.31. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} X - Y = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$

លំហាត់ 3.32. គេអោយម៉ាទ្រីស $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ និង $N = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ។
គណនា MN, NM, $(M-N)^2$ និង $M^2 - 2MN + N^2$ រួចធ្វើអធិប្បាយលទ្ធផល។

លំហាត់ 3.33. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ដែល $AB = BA$ ។ បង្ហាញឯកលក្ខណៈភាពខាងក្រោម៖

1. $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
2. $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + B^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}^*$
3. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
4. $(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i A^{n-i} B^i)$, $n \in \mathbb{N}^*$

លំហាត់ 3.34 (ការគណនាផលគុណនៃម៉ាទ្រីសទំហំ n). 1. គេយក $A = (2^i 3^{-j})_{1\le i,j\le n}$ និង $B = (4^{2i-1}6^{j+2})_{1\le i,j\le n}$ ។ គណនា $(AB)_{1\le i,j\le n}$ និង $(BA)_{1\le i,j\le n}$ ។

2. សំណួរដូចគ្នា ចំពោះ $A = (\delta_{1,j})_{1\le i,j\le n}$ និង $B = (4^{2i-1}6^{j+2})_{1\le i,j\le n}$ ។

លំហាត់ 3.35. គេអោយម៉ាទ្រីស $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ។ គេសរសេរ A ជាផលគុណ LU ដែល $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ និង $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n-1} & u_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & u_{3n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$
ឧបមាថា $u_{i,i\neq}$ ចំពោះគ្រប់ $i = 1, 2, \cdots, n$ ។ បង្ហាញថា គេបាន

$$\begin{array}{rcll} u_{11} & = & a_{1,1} & \\ u_{1j} & = & a_{1j} & \text{ចំពោះ } j = 2, \cdots, n \\ l_{j1} & = & \dfrac{a_{j1}}{u_{11}} & \text{ចំពោះ } j = 2, \cdots, n \\ u_{ii} & = & a_{ii} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki} & \text{ចំពោះ } i = 2, \cdots, n-1 \\ u_{ij} & = & a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} & \text{ចំពោះ } i = 2, \cdots, n-1,\ j = i+1, \cdots, n \\ l_{ji} & = & \dfrac{1}{u_{ii}}\left(a_{ji} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki}\right) & \text{ចំពោះ } i = 2, \cdots, n-1,\ j = i+1, \cdots, n \\ u_{nn} & = & a_{nn} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn} & \end{array}$$

លំហាត់ 3.36. គេយក $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ។

1. កំណត់ A^2, B^2, BA និង $(A+B)^2$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ A និង B ។
2. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ បញ្ជាក់ $(A+B)^n$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ A និង B ។

លំហាត់ 3.37. គេអោយ $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ និង $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ។

1. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីអោយ $A = aI + bJ$ ។
2. គណនា J^2 ។
3. គណនា A^2, A^3 និង A^4 ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ I និង J ។

លំហាត់ 3.38. គេអោយ $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ ។ តើមានគូ (a, b) ដែល $AB = BA$ រឺទេ ?

លំហាត់ 3.39. គេចង់រកស្វ័យគុណទី n នៃម៉ាទ្រីស $M = \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។ ឧបមាថា M^n អាចសរសេរក្រោមទំរង់ $M^n = \begin{pmatrix} u_n & -u_n \\ -v_n & v_n \end{pmatrix}$ ។

1. កំណត់ u_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ u_n, a និង b រួច v_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ v_n, a និង b ។
2. ទាញរកកន្សោម M^n ជាអនុគមន៍នៃ n, a និង b ។
3. អនុវត្តន៍៖ $M = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ។

លំហាត់ 3.40. គេអោយម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ និង $J = A - I_3$ ។

1. បង្ហាញថាមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ដែល $J^k = 0$ (គេថា J ជាធាតុនីប៉ូតង់លំដាប់ k) ។
2. ទាញរក A^n ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$ ។

លំហាត់ 3.41. បង្ហាញថា $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីនីប៉ូតង់។

លំហាត់ 3.42. A ជាម៉ាទ្រីសផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$A^2 - A - 2I = 0 \tag{3.60}$$

ហើយ λ_1 និង λ_2 ជារឺសសមីការ

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \tag{3.61}$$

1. ចូរអោយឧទាហរណ៍មួយនៃម៉ាទ្រីស A ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ (3.60) ។
2. គេយក $P = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 I)$ និង $Q = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_2 I)$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P^2 = P$ និង $Q^2 = Q$ ។ កំណត់ $P + Q$, PQ និង QP ។
3. បញ្ជាក់ A ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ P និង Q ។

4. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 2$ បញ្ជាក់ A^n ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ A និង I ។

5. (u_n) ជាស៊ីតកំណត់ដោយ $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ ។ រកម៉ាទ្រីស A ដែល $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ ។

6. បង្ហាញថា A ផ្ទៀងផ្ទាត់ (3.60) និងថា $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ ។
ទាញរក $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$, λ_1, λ_2 ។

លំហាត់ 3.43. គេមាន $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ ។
គណនា ${}^tAA$ ។ តើ A មានចំរាសរឺទេ? បើមាន រកចំរាសរបស់វា។

លំហាត់ 3.44. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 232 & -15 \end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសដូចគ្នា និងរកគ្រប់ម៉ាទ្រីស P មានចំរាសដែល $P^{-1}AP = B$ ។

លំហាត់ 3.45. គណនាចំរាស និង ស្វ័យគុណនៃ $A = \begin{pmatrix} 1 & h & h^2 & h^3 & h^4 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 & 4h^3 \\ 0 & 0 & 1 & 3h & 6h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ។

លំហាត់ 3.46. f ជាអង់ដូមរភីសមួយនៃ E ($\dim E = n \geq 1$) ។ ឧបមាថា $f^n = 0$ និង $f^{n-1} \neq 0$។
បង្ហាញថាមានគោលមួយនៃE ដែលម៉ាទ្រីសនៃ f ជាម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ។

លំហាត់ 3.47. ចូរបញ្ជាក់ថាតើ $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$ មានចំរាសរឺទេ។ គណនាចំរាសរបស់វាក្នុងករណីនេះ។

លំហាត់ 3.48. គណនាចំរាសនៃ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ddots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ។

លំហាត់ 3.49. បង្ហាញថា $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ មានចំរាស និង គណនាចំរាសរបស់វា។

លំហាត់ 3.50. គេយក $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ។ គេយក $s = a+d$ (គន្លងនៃ A)និង $\delta = ad-bc$ (ដេទែរមីណង់នៃ A) ។
បង្ហាញថា $A^2 - sA + \delta I = 0$ ។ ទាញថា A មានចំរាសលុះត្រាតែ $\delta \neq 0$ ។
បញ្ជាក់ A^{-1} ជាអនុគមន៍នៃ A ។

លំហាត់ 3.51. ចំពោះ ម៉ាទ្រីសការេ A ទំហំ n មានតួទូទៅ a_{ij} គេយក $tr(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$ (គន្លងនៃ A)។
បង្ហាញថាចំពោះម៉ាទ្រីស A នៃ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ និង B $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ គេបាន $tr(AB) = tr(BA)$ ។

លំហាត់ 3.52. គេយក $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ។ A និង B ជាម៉ាទ្រីសនៃ $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ មានតួទូទៅ $a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$ និង $b_{ij} = \omega^{-(i-1)(j-1)}$ រៀងគ្នា។
គណនា A^2, B^2, AB និង BA ។ គណនា A^{-1} ។

លំហាត់ 3.53. ចូរបញ្ជាក់ថា $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ មានចំរាស និង គណនាចំរាសរបស់វា។

លំហាត់ 3.54. ចូរបញ្ជាក់ថា $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ មានចំរាស និង គណនាចំរាសរបស់វា។

លំហាត់ 3.55. ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មិនសូន្យ គណនា A^n ៖

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

លំហាត់ 3.56. ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មិនសូន្យ គណនា A^n ៖

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ម៉ាទ្រីសការេទំហំ p)

លំហាត់ 3.57. ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មិនសូន្យ គណនា A^n ៖

1. $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$

លំហាត់ 3.58. $A \in \mathcal{M}_3(K)$ ។ កំណត់ពហុធា P មួយមានដឺក្រេអប្បបរិមាដែល $P(A) = 0$ ។ទាញរក A^n ។
អនុវត្តន៍

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

លំហាត់ 3.59. គេយក $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $(M-I)(M+3I)=0$ ។ ទាញរក M^n ។

លំហាត់ 3.60. A ជាម៉ាទ្រីសការេដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $A^2-3A+5I=0$ ។
បង្ហាញថា A និង គណនា A^{-1} ជាអនុគមន៍នៃ A ។

លំហាត់ 3.61. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ដែល $A^3+A=0$ ។ បង្ហាញថា A មិនមានចំរាស។

លំហាត់ 3.62. គេអោយ $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$ ។

1. គណនា M^2 និង M^3 ។ ទាញថា $M^3+2M^2-M-2I=0$ ។
2. បង្ហាញថា M មានចំរាស និង គណនាចំរាសរបស់វា។

លំហាត់ 3.63. គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} M_n$ ជាមួយនឹង $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$។
ណែនាំ ៖ គេយក $\dfrac{\alpha}{n} = \tan\varphi_n$ ជាមួយនឹង $|\varphi| < \dfrac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ 3.64. $P(A)=0$

លំហាត់ 3.65. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត t គេយក $A(t) = \begin{pmatrix} 1+\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1-\frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}$ ។

1. គណនា $A(s)A(t)$ ។
2. គណនា $(A(s)-I)^3$ ។
3. រក $(\alpha),(\beta_n),(\gamma_n)$ ដែល $\forall n\in\mathbb{N}, A(t)^n = \alpha_n A(t)^2+\beta_n A(t)+\gamma_n I$ ។

លំហាត់ 3.66. រកម៉ាទ្រីសដែលឆ្លាស់ជាមួយ $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ។

លំហាត់ 3.67. a, b, c ជាចំនួនពិតដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ។ គេយក $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ និង $N = I - M$ ។
បង្ហាញថា $M^2 = M$ ។ ទាញរក MN, NM និង N^2 ។

លំហាត់ 3.68. គណនាចំរាសនៃ $A=\begin{pmatrix}1&-a&0&0\\0&1&-a&0\\0&0&1&-a\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

លំហាត់ 3.69. គេមាន $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\-1&1\end{pmatrix}$ ។ រកម៉ាទ្រីស B $BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ។

លំហាត់ 3.70. ដោះស្រាយសមីការ ក្នុង $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ៖

1. $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-3&2\\5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\3&-1\end{pmatrix}$

លំហាត់ 3.71. 1. រកគ្រប់ម៉ាទ្រីស A នៃ $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ដែល $A^2=0$ ។

2. រកគ្រប់ម៉ាទ្រីស A នៃ $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ដែល $A^2=I$ ។
3. រកគ្រប់ម៉ាទ្រីស A នៃ $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ដែល $A^2=A$ ។

លំហាត់ 3.72. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតមួយកំណត់ដោយ

$$u_0=0 \text{ និង } u_{n+1}=au_n+bu_{n-1} \text{ ចំពោះ } n\geq 1 \text{ ជាមួយនឹង } u_1\neq 0$$

គេអោយម៉ាទ្រីស $M=\begin{pmatrix}0&c\\u_1&a\end{pmatrix}$ ដែល $c=\dfrac{b}{u_1}$ ។

1. បង្ហាញថា
$$M^n=\begin{pmatrix}cu_{n-1}&\frac{cu_n}{u_1}\\u_n&\frac{u_{n+1}}{u_1}\end{pmatrix}$$
2. ទាញថា ចំពោះ $n\geq 0$ តួ $u_nu_{n+2}-u_{n+1}^2$ មិនអាស្រ័យនឹង b និង នឹង u_1 ។
3. កាលណា $b=-1, a=2\cosh\theta$ ដែល $\theta>0$ និង $u_1=1$ គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ θ រួចកំណត់ទំនាក់ទំនងដែលបានទទួលនៅ 2 ។

លំហាត់ 3.73. A ជាម៉ាទ្រីស $\begin{pmatrix}C_0^0&C_1^0&C_2^0&\cdots&C_n^0\\0&C_1^1&C_2^1&\cdots&C_n^1\\\vdots&\ddots&C_2^2&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&C_n^{n-1}\\0&\cdots&\cdots&0&C_n^n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ មានតួទូទៅ $a_{i,j}=C_{j-1}^{i-1}$ ចំពោះ $i,j\in\{0,\cdots,n\}$ (ជាមួយនឹងការកំណត់យក $C_i^j=0$ ចំពោះ $i<j$) ។

1. សរសេរ A និងចំរាសរបស់វា ចំពោះ $n=2$ និង 3។

2. u ជាអង់ដូមរភីសនៃ $\mathbb{R}_n[x]$ ដែលមាន A ជាម៉ាទ្រីស។ គណនា $u(x^k)$ រួច $u(p)$ ចំពោះ $\in \mathbb{R}_n[x]$ ។

3. ទាញថា A មានចំរាស និង បង្ហាញថា $A^{-1} = JAJ$ ដែល J ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងដែលត្រូវកំណត់។

លំហាត់ 3.74. គណនាចំរាសនៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

លំហាត់ 3.75. គេអោយម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ និង $N = A - I$ ដែល I ជាម៉ាទ្រីសឯកតាទំហំ 3 ។

1. គណនា N^2 និង N^3 ។ ទាញរក N^n ចំពោះ $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ។

2. ទាញរករូបមន្តដែលបញ្ជាក់ A^n ជាអនុគមន៍នៃ I, N និង N^2 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

3. កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីអោយម៉ាទ្រីស $B = aI + bN + cN^2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $AB = I$ ។ ទាញរក A^{-1} ចំរាសនៃ A ជាអនុគមន៍នៃ I, N និង N^2 ។ ជាអនុគមន៍នៃ I, N និង N^2 ។

4. គណនា A^{-n} ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ គណនា A^k ចំពោះចំនួនគត់រីឡាទីប k ។

លំហាត់ 3.76. គេអោយម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ និង $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ។

1. គណនា A^2 និង A^3 ។

2. កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីអោយ $A^3 + aA^2 + bA + cI = 0$ ។

3. ទាញថា A មានចំរាស និង គណនាចំរាសរបស់វា។

លំហាត់ 3.77. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយលើកាយ $\mathbb{K}$ មានវិមាត្រ 3 និង $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ ជាគោលមួយនៃ E ។ គេអោយម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ និង $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ។
f ជាអង់ដូមរភីសមួយនៃ E ដែលម៉ាទ្រីសរបស់វាក្នុងគោល $\mathcal{B}$ ជាម៉ាទ្រីស A ។

1. បង្ហាញថាមានគោល $\mathcal{B}'=(e_1',e_2'\,e_3')$ មួយនៃ E ដែលម៉ាទ្រីសនៃ f ក្នុងគោល $\mathcal{B}'$ ជាម៉ាទ្រីស D ។
2. កំណត់ម៉ាទ្រីស P នៃ $LG_3(\mathbb{R})$ ដែល $A=PDP^{-1}$ ។ គណនា P^{-1} ។
3. គណនា A^n ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$ ។
4. ទាញរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (x_n), (y_n) និង (z_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 0 \\ z_0 &= 0 \end{cases}$ និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n
$$\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

លំហាត់ 3.78. គណនារ៉ង់នៃគ្រួសារនៃវ៉ិចទ័រនៃ $\mathbb{R}^3$ ដូចខាងក្រោម៖

1. (x_1,x_2,x_3) ជាមួយនឹង $x_1=(1,1,0)$, $x_2=(1,0,1)$ និង $x_3=(0,1,1)$
2. (x_1,x_2,x_3) ជាមួយនឹង $x_1=(2,1,1)$, $x_2=(1,2,1)$ និង $x_3=(1,1,2)$
3. (x_1,x_2,x_3) ជាមួយនឹង $x_1=(1,2,1)$, $x_2=(1,0,3)$ និង $x_3=(1,1,2)$

លំហាត់ 3.79. គណនារ៉ង់នៃគ្រួសារនៃវ៉ិចទ័រនៃ $\mathbb{R}^4$ ដូចខាងក្រោម៖

1. (x_1,x_2,x_3,x_4) ជាមួយនឹង $x_1=(1,1,1,1)$, $x_2=(1,-1,-1,1)$, $x_3=(-1,1,1,-1)$ និង $x_4=(1,-1,1,-1)$
2. (x_1,x_2,x_3,x_4) ជាមួយនឹង $x_1=(1,1,1,1)$, $x_2=(1,-1,-1,1)$, $x_3=(1,1,-1,-1)$ និង $x_4=(-1,1,1,-1)$
3. (x_1,x_2,x_3) ជាមួយនឹង $x_1=(1,-1,1,1)$, $x_2=(1,1,-1,1)$ និង $x_3=(1,1,1,-1)$
4. (x_1,x_2,x_3) ជាមួយនឹង $x_1=(1,-1,-1,1)$, $x_2=(1,1,-1,-1)$ និង $x_3=(-1,1,1,-1)$

លំហាត់ 3.80. គណនារ៉ង់នៃអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរខាងក្រោម៖

1. $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ កំណត់ដោយ $f(x,y,z)=(-x+y+z,x-y+z,x+y-z)$
2. $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ កំណត់ដោយ $f(x,y,z)=(x-y,y-z,z-x)$
3. $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^4$ កំណត់ដោយ $f(x,y,z)=(x+y+z,x-y+z,x+y-z,x-y-z)$

4. $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ កំណត់ដោយ $f(x,y,z,t) = (x+y+z, y+z+t, t+x+y)$

5. $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ កំណត់ដោយ $f(x,y,z,t) = (x+y+z-t, x+y-z+t, x-y+z+t, -x+y+z+t)$

6. $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ កំណត់ដោយ $f(x,y,z,t) = (x+y-z-t, x-y-z+t, x-y+z+t, -x-y+z+t, -x+y+z-t)$

លំហាត់ 3.81. គណនារ៉ង់នៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & a \end{pmatrix}$ ដែល $a \in \mathbb{K}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 5 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 11 & 7 & -6 \end{pmatrix}$

លំហាត់ 3.82. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយមានវិមាត្របីប្រដាប់ដោយគោល $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ ។ យក $\lambda\in\mathbb{R}$ និង គេអោយវ៉ិចទ័រ $v_1=-e_1-e_2+e_3$, $v_2=e_1-\lambda e_2-e_3$ និង $v_3=e_1-e_2-\lambda e_3$ ។

1. f_λ ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរពី E ទៅក្នុង E កំណត់ដោយ $f_\lambda(e_1)=v_1$, $f_\lambda(e_2)=v_2$ និង $f_\lambda(e_3)=v_3$ ។ កំណត់ម៉ាទ្រីស A_λ នៃ f_λ ក្នុងគោល $\mathcal{B}$ ។
2. កំណត់ទៅតាមតំលៃនៃ λ រ៉ង់នៃ f_λ ។
3. កំណត់ទៅតាមតំលៃនៃ λ ស្នូលនៃ f_λ ។
4. បង្ហាញថាម៉ាទ្រីស $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ មានចំរាស និងគណនាចំរាសរបស់វា។
5. បង្ហាញថា $A_0=PBP^{-1}$ ដែល $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ ។
   ទាញថា $f_0^3=f^0$ ។

លំហាត់ 3.83 (ម៉ាទ្រីសប្រភេទ $I+A$). A ជាម៉ាទ្រីសការេទំហំ $n\geq 0$ ។ ឧបមាថា A និង I_n+A មានចំរាស។

1. បង្ហាញថា I_n+A^{-1} មានចំរាស។
2. បង្ហាញថា $(I_n+A^{-1})^{-1}+(I_n+A)^{-1}=I_n$ ។

លំហាត់ 3.84. A និង B ជាពីរម៉ាទ្រីសនៃ $LG_n(\mathbb{K})$ ។ គេកំណត់យក I_n ជាម៉ាទ្រីសឯកតា។
បង្ហាញថាបើ I_n-AB មានចំរាស នោះ I_n-BA ក៏មានចំរាសដែរ។

លំហាត់ 3.85. គេមាន $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ និង $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$ ។

1. បង្ហាញថាមានម៉ាទ្រីស $P\in LG_(\mathbb{R})$ ដែល $B=P^{-1}AP$ ។
2. គណនា B^{2013} រួច A^{2013} ។

លំហាត់ 3.86. E ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ប្រដាប់ដោយគោល $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ ។ f ជាអង់ដូមរភីសនៃ E ដែលម៉ាទ្រីសរបស់វាក្នុងគោល $\mathcal{B}$ ជាម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-2&1&-2\\1&1&3\end{pmatrix}$ ។
$\mathcal{B}'=(e_1',e_2',e_3')$ ជាគ្រួសារមួយកំណត់ដោយ $\begin{cases}e_1'=e_1+e_2-e_3\\e_2'=e_1-e_3\\e_3'=e_1-e_2\end{cases}$

1. បង្ហាញថា $\mathcal{B}'$ ជាគោលមួយនៃ E និង កំណត់ម៉ាទ្រីស D នៃ f ក្នុងគោលនេះ។
2. កំណត់ម៉ាទ្រីសប្តូគោល P ពី $\mathcal{B}$ ទៅ $\mathcal{B}'$ និងគណនា P^{-1} ។

3. រកទំនាក់ទំនងរវាង A, D, P និង P^{-1} ។

4. គណនា A^{2013} ។

លំហាត់ 3.87. E ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ប្រដាប់ដោយគោល $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ ។ f ជាអង់ដូមរភីសនៃ E ដែលម៉ាទ្រីសរបស់វាក្នុងគោល $\mathcal{B}$ ជាម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ។

1. បង្ហាញថាមានគោល $\mathcal{B}'$ មួយនៃ E ដែលក្នុងនោះម៉ាទ្រីសនៃ f ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង D មានមេគុណ $1, 2$ និង 3 ។

2. កំណត់ម៉ាទ្រីសប្ដូគោល P ពី $\mathcal{B}$ ទៅ $\mathcal{B}'$ និងគណនា P^{-1} ។

3. រកទំនាក់ទំនងរវាង A, D, P និង P^{-1} ។

4. គណនា A^{2013} ។

លំហាត់ 3.88. ស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) កំណត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយស្គាល់តួដំបូង u_0 និង v_0 របស់វា និងទំនាក់ទំនងកំណើន

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$

1. បង្ហាញថាមានម៉ាទ្រីស $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ដែល

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

2. បង្ហាញថាគេអាចសរសេរ $A = 5I + J$ ដែល I ជាម៉ាទ្រីសឯកតា និង J ជាម៉ាទ្រីសនឹងត្រូវកំណត់។

3. គណនា A^n ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \in \mathbb{N}$ ។

4. ទាញពីសំណួរខាងដើម កន្សោម u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

លំហាត់ 3.89. គេមាន $x \in \mathbb{R}^*$ និង $\begin{pmatrix} 0 & x & x^2 \\ \frac{1}{x} & 0 & x \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix}$ ។

1. បង្ហាញថាមានចំនួនពិត λ និង μ ដែល $(A - \lambda I)(A - \mu I) = 0$ ។

2. ទាញថា A មានចំរាស និងគណនាចំរាសរបស់វា។តរីសឯកតា និង J ជាម៉ាទ្រីសនឹងត្រូវកំណត់។

3. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I$$

ដែល α_n និង β_n ជាពីរចំនួនគត់។

4. គេកំណត់ស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) ដោយ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = \alpha_n - \beta_n \\ v_n = 2\alpha_n + \beta_n \end{cases}$$

បង្ហាញថា (u_n) និង (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។ កំណត់កន្សោម u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

5. ដោយប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរខាងលើ កំណត់ α_n និង β_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។ ទាញរក A^n ។

លំហាត់ 3.90. គេយក $A = \begin{pmatrix} \cosh x & 0 & \sinh x \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh x & 0 & \cosh x \end{pmatrix}$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ។ គេយក f ជាអង់ដូម័រភីសនៃ $\mathbb{R}^3$ ដែលម៉ាទ្រីសរបស់វាក្នុងគោលកាណុនិច ជាម៉ាទ្រីស A ។

1. គេយក $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ និង $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ។ បង្ហាញថា $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}^3$ ។

2. កំណត់ម៉ាទ្រីស B នៃ f ក្នុងគោល $\mathcal{B}$ ។ ទាញរក A^n ។

លំហាត់ 3.91. យក $a, b, c \in \mathbb{C}$ និង $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ ។ គេយក f ជាអង់ដូម័រភីសនៃ $\mathbb{C}^3$ ដែលម៉ាទ្រីសរបស់វាក្នុងគោលកាណុនិច ជាម៉ាទ្រីស A ។

គេអោយវ៉ិចទ័រ $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ និង $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ។

បង្ហាញថា (v_1, v_2, v_3) ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{C}^3$ ។ កំណត់ម៉ាទ្រីសនៃ f ក្នុងគោនេះ។ ទាញរករបៀបនៃការគណនា A^n ។

លំហាត់ 3.92. a, b, c ជាបីចំនួនពិតដែលមួយយ៉ាងតិចមិនសូន្យ។ គេកំណត់ $A = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ ។

គេកំណត់យក f ជាអង់ដូម័រភីសនៃ $\mathbb{R}^3$ ដែលមានម៉ាទ្រីស A ក្នុងគោលកាណូនិច។

1. កំណត់រ៉ង់នៃ f ។

2. កំណត់ $\operatorname{Ker} f$ និង $\operatorname{Im} f$ ដោយអោយគោលមួយ និងបញ្ជាក់វិមាត្ររបស់វា។

3. តើគេបាន $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ រឺទេ?

លំហាត់ 3.93. គេយក $n \geq 2$ និង $E = \mathbb{R}_n[x]$ គេកំណត់អនុវត្តន៍ f លើ E ដោយ $f(p(x)) = (x^2 - x)p(1) + (x^2 + x)p(-1)$ ។

1. បង្ហាញថា f ជាអង់ដូម័រភីសមួយនៃ E ។

2. កំណត់ម៉ាទ្រីសនៃ f ក្នុងគោលកាណូនិច។ កំណត់រ៉ង់នៃ f ។

3. កំណត់ $\operatorname{Ker} f$ និង $\operatorname{Im} f$ ។

លំហាត់ 3.94. គេយក $n \geq 2$ និង $E = \mathbb{R}_n[x]$ គេកំណត់អនុវត្តន៍ φ លើ E ដោយ $\varphi(p(x)) = (x-1)p'(x) + p''(0)$ ។

1. បង្ហាញថា f ជាអង់ដូម័រភីសមួយនៃ E ។

2. កំណត់ម៉ាទ្រីស M នៃ φ ក្នុងគោលកាណូនិច។

3. កំណត់ $\operatorname{Ker} \varphi$ និង $\operatorname{Im} \varphi$ និងអោយគោលមួយនៃលំហរ៉ិចទ័ររងនេះ។

4. បង្ហាញថា $\operatorname{Im} \varphi = \{q \in E,\ q(0) + q'(0) = 0\}$ ។

5. រកលទ្ធផលនេះសាជាថ្មីដោយប្រើដេរីវេនៃ $\varphi(p)$ ។

លំហាត់ 3.95. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរដែលមានម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ក្នុងគោលកាណូនិច។

1. កំណត់រូបភាព និងស្នូលនៃ f ។

2. កំណត់រូបភាពច្រាសនៃប្លង់សមការ $x + y + z = 0$ ។

លំហាត់ 3.96. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ ជាអនុវត្តន៍លីនេកំណត់ដោយ $\begin{cases} X = 5x + 2y - z \\ Y = -8x - 3y + 2z \\ X = -x - 2y - 3z \\ T = 3x - y - 5z \end{cases}$

1. កំណត់រូបភាព និងស្នូលនៃ f ។

2. កំណត់រូបភាពនៃប្លង់សមការ $x + y + z = 0$ ។

លំហាត់ 3.97. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ជាអនុវត្តន៍លីនេកំណត់ដោយ $\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = x - y + z \end{cases}$

1. កំណត់រូបភាពនៃប្លង់សមការ $x + y + z = 0$ ។

2. កំណត់រូបភាពច្រាសនៃប្លង់សមការ $x + y + z = 0$ ។

លំហាត់ 3.98 (គោលឌុយអាល). 1. គេអោយវ៉ិចទ័រ $v_1 = (2,1)$ និង $v_2 = (5,3)$ នៃ $\mathbb{R}^2$ ។ បង្ហាញថា $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}^2$ ។ កំណត់គោលឌុយអាល $\mathcal{B}^*$ របស់វា។

2. គេអោយវ៉ិចទ័រ $v_1 = (-1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,1)$ និង $v_3 = (1,1,-1)$ នៃ $\mathbb{R}^3$ ។ បង្ហាញថា $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}^3$ ។ កំណត់គោលឌុយអាល $\mathcal{B}^*$ របស់វា។

3. បង្ហាញថា $\mathcal{B} = ((1,0,1,-11),\ (2,1,1,1),\ (0,2,-11,2),\ (1,2,0,2))$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}^4$ ។ កំណត់ $\mathcal{B}^*$ គោលនៃ $(\mathbb{R}^4)^*$ គោលឌុយអាល់នៃ $\mathcal{B}$ ។

លំហាត់ 3.99. គ្រួសារនៃទំរង់លីនេអ៊ែរខាងក្រោមជាគ្រួសារអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ រឺមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ $(\mathbb{R}^3)^*$? បើវាជាគ្រួសារអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ រកទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែររបស់វា។

1. $\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2+x_3,\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3) = x_1-x_2-x_3$
2. $\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1-x_2-x_3,\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3) = -x_1+x_2+x_3$
3. $\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = -x_1+x_2+x_3,\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3) = x_1-x_2+x_3,\ \varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2-x_3$
4. $\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1-x_2-x_3,\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3) = -x_1-x_2+x_3,\ \varphi_3(x_1,x_2,x_3) = -x_1+x_2-x_3$
5. $\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1+2x_2+3x_3,\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3) = 2x_1-x_2+x_3,\ \varphi_3(x_1,x_2,x_3) = 3x_1+x_2+4x_3$

លំហាត់ 3.100. អនុវត្តន៍ $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$ ពី $\mathbb{R}^3$ ទៅ $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_3,\ \ \varphi_2(x_1,x_2,x_3) = 2x_1-3x_2,\ \ \varphi_3(x_1,x_2,x_3) = x_1+2x_2+2x_3$$

1. បង្ហាញថា $D^* = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ ជាគោលមួយនៃ $(\mathbb{R}^3)^*$ ។
2. កំណត់គោលឌុយអាល់នៃ D^* ក្នុង $\mathbb{R}^3$ ។

លំហាត់ 3.101. $E = \mathbb{R}_2[x]$ ជាលំហវ៉ិចទ័រនៃពហុធាចំនួនពិតមានដឺក្រេតូចជាងរឺស្មើនឹងពីរ។ គេំណត់អនុវត្តន៍ $f_0,\ f_1$ និង f_2 លើ E ដោយ $f_i(p) = p(i)$ ចំពោះ $p \in E$ ។

1. បង្ហាញថា f_i $(i = 0,1,2)$ ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ។
2. បង្ហាញថា (f_0,f_1,f_2) ជាគោលមួយនៃ E^* ។

ជំពូក 4

ដេទែរមីណង់

4.1 និយមន័យតាមវាចារណ៍កំណើននៃដេទែរមីណង់

និយមន័យ 4.1. យក $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ។
គេកំណត់តាមវាចារណ៍ដោយកំណើន អនុវត្តន៍

$$\begin{array}{rccc} \det: & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & A & \mapsto & \det(A) \end{array}$$

តាមបែបខាងក្រោម៖

1. បើ $n = 1$ មានន័យថា $A = (a)$ គេកំណត់

$$\det(A) = a \tag{4.1}$$

2. បើ $n > 1$ គេកំណត់យក A_{ij} ជាម៉ាទ្រីសទទួលបានពី A ដោយលុបជួរដេកទី i និងជួរឈរទី j (មានន័យថាជួរដេក និងជួរឈរដែលកាត់តាមធាតុ a_{ij}) ដូច្នេះ គេយក

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) + \cdots + (-1)^{1+k}a_{1k}\det(A_{1k}) + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{1n}) \tag{4.2}$$

ស្កាលែរ $\det(A)$ ហៅថាដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីស A និង កំណត់ជាញឹកញាប់
$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ជាដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ។
ស្កាលែរ $M_{ij} = \det(A_{ij})$ ហៅថាមីន័រលំដាប់ $n-1$ នៃធាតុ a_{ij} ទាញចេញពី A ។

ឧទាហរណ៍ 4.1.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - (-1) \times 3 = 11$$

ជាទូទៅ

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{4.3}$$

ឧទាហរណ៍ 4.2.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\
&= (1+5) + 2(2+1) + 3(10) \\
&= 39
\end{aligned}$$

ជាទូទៅ

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - a' \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \\
&= a(b'c'' - b''c') - a'(bc'' - b''c) + a''(bc' - b'c)
\end{aligned}$$

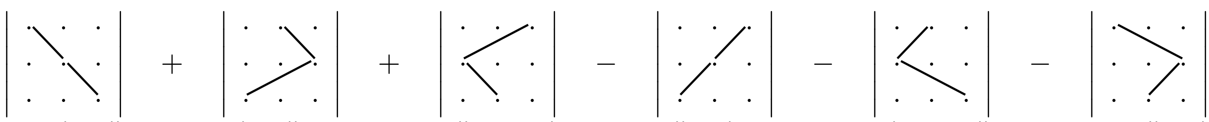
ដូច្នេះ

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + a'b''c + a''bc'' - a''b'c - a'bc'' - ab''c' \tag{4.4}$$

វិធានសារូស លទ្ធផលនៃឧទាហរណ៍ 4.2 អនុញ្ញាត្តិអោយចែងជាវិធានសារូសសំរាប់ការគណនាដេទែរមីណង់លំដាប់បី៖ ដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីសលំដាប់បីជាផលបូកប្រាំមួយតួ ដែលបីតួប្រដាប់ដោយសញ្ញា " + " និង បីតួត្រដាប់ដោយសញ្ញា " - "

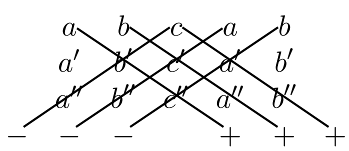
1. ផលគុណប្រដាប់ដោយសញ្ញា " + " ជាបីតួនៃអង្កត់ទ្រូង និង ពីរតួទៀតស្របនឹងអង្កត់ទ្រូងនេះ។
2. ចំពោះផលគុណប្រដាប់ដោយសញ្ញា " - " គេធ្វើដូចគ្នាដោយប្តូរអង្កត់ទ្រូង។

និយាយអោយច្បាស់ នេះជាគំនូសបំព្រួញនៃវិធានសារូស៖



$$a\,b'\,c'' + a'\,b''\,c + a''\,b\,c' - a''\,b'\,c - a'\,b\,c'' - a\,b''\,c'$$

គំនូសបំព្រួញនេះអាចសរសេរ



ឧទាហរណ៍ 4.3.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ ដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីសត្រីកោណមួយស្មើនឹងផលគុណនៃតួនៃអង្កត់ទ្រូង។

4.2 ទំរង់ពហុលីនេអ៊ែរឆ្លាស់

លក្ខណៈសំខាន់ៗនៃដេទែរមីណង់ត្រូវបានបញ្ជាក់ដោយទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមដែលគេនិយាយថាដេទែរមីណង់ជាទំរង់ពហុលីនេអ៊ែរឆ្លាស់។

ទ្រឹស្តីបទ 4.1. 1. ដេទែរមីណង់ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរធៀបតៅនឹងជួរឈរនិមួយៗ មានន័យថា បើ $A = ||c_1, \cdots, c_n||$ (ដែល $c_1, \cdots, c_n$ តាងជួរឈរនៃ A) នោះ គេបាន

$$\det ||c_1, \cdots, \lambda c_k, \cdots, c_n|| = \lambda \det ||c_1 \cdots, c_k, \cdots, c_n|| \tag{4.5}$$

និង បើ $c_k = a_k + b_k$ គេបាន

$$\det ||c_1, \cdots, a_k + b_k, \cdots, c_n|| = \det ||c_1, \cdots, a_k, \cdots, c_n|| + \det ||c_1, \cdots, b_k, \cdots, c_n|| \tag{4.6}$$

2. បើជួរឈរពីរស្មើគ្នា នោះដេទែរមីណង់ស្មើនឹងសូន្យ *i.e.* បើ $c_i = c_j$ នោះ

$$\det ||c_1, \cdots, c_i, \cdots, c_j, \cdots, c_n|| = 0 \tag{4.7}$$

សំរាយបញ្ជាក់

1. យើងនឹងបង្ហាញតាមវិចារណ៍ដោយកំនើនលើ n ។
ចំពោះ $n = 1$ ទំនាក់ទំនង (4.5) និង (4.6) ពិតជាផ្ទៀងផ្ទាត់។
ចំពោះ $n = 2$ យើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់យ៉ាងងាយ ទំនាក់ទំនង (4.5) និង (4.6) មានន័យថា គេបាន

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{vmatrix} &= \lambda ad - \lambda bc \\
&= \lambda(ad - bc) \\
&= \lambda \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{vmatrix} &= (a+a')d-(b+b')c \\ &= (ad-bc)+(a'd-b'c) \\ &= \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & c \\ b' & d \end{vmatrix}\end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរ គេអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ភាពលីនេអ៊ែរធៀបទៅនឹងជួរឈរទីពីរ។
ឧបមាថា ទំនាក់ទំនង (4.5) និង (4.6) ពិតចំពោះ $n-1$ ។ យក $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ ។ យើងនឹងបង្ហាញភាពលីនេអ៊ែរនៃ A ធៀបនឹងជួរឈរទី k ដែល $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ ។
តាមនិយមន័យ 4.1 យើងបាន

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+j} \det(A_{1j})$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $det(A_{1j})$ និមួយលីនេអ៊ែរធៀបនឹងជួរឈរទី k ។
បើ $j < k$ យើងបាន

$$A_{1j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ក្នុងករណីនេះ តួ a_{1j} មិនអាស្រ័យនឹងជួរឈរទី k ដូច្នេះម៉ាទ្រីស A_{1k} ផ្ទុកជួរឈរទី k ។ តាមសម្មតិកម្មកំណើន $\det(A_{1j})$ ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរធៀបទៅនឹងជួរឈរទី k ។ ដូច្នេះ $a_{1j}\det(A_{1j})$ អាស្រ័យលីនេអ៊ែរធៀបនឹងជួរដេទី k ។
ដូចគ្នដែរ ចំពោះ $j > k$ យើងបាន $a_{1j}\det(A_{1j})$ លីនេអ៊ែរធៀបនឹងជួរឈរទី k ។
ឥឡូវនេះ យើងសិក្សាភាពលីនេអ៊ែរចំពោះ $j = k$ ។ ដូច្នេះ $a_{1j} = a_{1k}$ អាស្រ័យលីនេអ៊ែរធៀបនឹងជួរឈរទី k ចំណែកឯ a_{1k} មិនផ្ទុកជួរឈរទី k ។ ដូច្នេះ $a_{1k}\det(A_{1k})$ លីនេអ៊ែរធៀបនឹងជួរឈរទី k ។
សរុប $\det(A)$ អាស្រ័យលីនេអ៊ែរធៀបនឹងជួរឈរទី k ។

2. យើងនឹងបង្ហាញថា បើជួរឈរពីរស្មើគ្នា នោះដេទែរមីណង់ស្មើនឹងសូន្យ។ ដើម្បីបកស្រាយ យើងនឹងប្រើបទគន្លឹះខាងក្រោម។

បទគន្លឹះ 4.1. បើជួរឈរជាប់គ្នាពីរស្មើគ្នា នោះដេទែរមីណង់ស្មើនឹងសូន្យ។

សំរាយបញ្ជាក់
យើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់បានដោយងាយថាបទគន្លឹះនេះពិតចំពោះ $n = 2$ ។ យ៉ងឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n-1$ យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ n ។
ឧបមាថា $c_k = c_{k+1}$ និង j ជាសន្ទស្សន៍មួយដែល $j < k$ ។
យើងបាន

$$A_{1j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & & a_{nk} & a_{nk} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

យើងឃើញថា A_{1j} ជាម៉ាទ្រីសការេទំហំ $n-1$ និងមានជួរដេកពីរស្មើគ្នា។ ដូច្នេះ តាមសម្មតិកម្មកំណើន ដេទែរមីណង់របស់វាស្មើនឹងសូន្យ។ ដូច្នេះ ក្នុងការពន្លាតនៃ $\det A$ គ្រប់តួទាំងអស់ទំរង់ $a_{1j}\det A_{1j}$ ជាមួយនឹង $j<k$ ស្មើនឹងសូន្យ។
ដូច្នេះ

$$\det A = (-1)^{1+k}a_{1k}\det A_{1k} + (-1)^{1+k+1}a_{1,k+1}\det A_{1,k+1}$$

ដោយសារតែ $c_k = c_{k+1}$ នោះ $a_{1k} = a_{1,k+1}$ និង $A_{1k} = A_{1,k+1}$ ។
យើងទាញបាន $\det A = 0$ ។
ដូចគ្នាដែរ បើ j ជាសន្ទស្សន៍ដែល $j > k+1$ យើងបាន $\det A = 0$ ។
ដូច្នេះបទគន្លឹះ 4.1 ត្រូវបានបង្ហាញ។

បទគន្លឹះ 4.2. ក្នុងដេទែរមីណង់មួយ បើគេប្តូរគ្នារវាងជួរឈរជាប់គ្នា នោះដេទែរមីណង់ស្មើនឹងសូន្យ។

សំរាយបញ្ជាក់
យើងនឹងបង្ហាញថា $\det||c_1,\cdots,c_j,c_{j+1},\cdots,c_n|| = -\det||c_1,\cdots,c_{j+1},c_j,\cdots,c_n||$ ។ យើងជំនួសក្នុងម៉ាទ្រីស A ជួរដេកទី j និង ទី $j+1$ ដោយផលបូក $c_j + c_{j+1}$ របស់វា។ តាមបទគន្លឹះ 4.1 យើងបាន

$$\det||c_1,\cdots,c_j+c_{j+1},c_j+c_{j+1},\cdots,c_n|| = 0$$

តាមភាពលីនេអ៊ែរធៀបនឹងជួរឈរនិមួយៗនៃដេទែរមីណង់ យើងបាន

$$\begin{aligned}0 &= \det||c_1,\cdots,c_j,c_j,\cdots,c_n|| + \det||c_1,\cdots,,c_j,c_{j+1},\cdots,c_n||\\ &\quad + \det||c_1,\cdots,c_{j+1},c_j,\cdots,c_n|| + \det||c_1,\cdots,c_{j+1},c_{j+1},\cdots,c_n||\end{aligned}$$

ដោយប្រើបទគន្លឹះ 4.1 យើងបាន

$$\det||c_1,\cdots,c_j,c_{j+1},\cdots,c_n|| = -\det||c_1,\cdots,c_{j+1},c_j,\cdots,c_n||$$

យើងត្រឡប់មកបកស្រាយសំណើ 4.2 នៃទ្រឹស្តីបទ 4.1 ។
យក i និង k ជាសន្ទសន្សន៍ដែល $c_i = c_k$ ។ ឧបមាថា $i<k$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}\det||c_1,\cdots,c_i,\cdots,c_k,\cdots,c_n|| &= (-1)^1\det||c_1,\cdots,c_{i+1},c_i,\cdots,c_k,\cdots,c_n||\\ &= (-1)^2\det||c_1,\cdots,c_{i+1},c_{i+2},c_i\cdots,c_k,\cdots,c_n||\\ &= (-1)^{k-i-1}\det||c_1,\cdots,c_{i+1},\cdots,c_{k-1},c_i,c_k,\cdots,c_n||\\ &= 0\end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរចំពោះ $i>k$ យើងក៏បាន $\det||c_1,\cdots,c_k,\cdots,c_i,\cdots,c_n|| = 0$ ។

វិបាក 4.1. បើគេប្តូរគ្នារវាងជួរឈរពីរ នោះដេទែរមីណង់ប្តូរសញ្ញា។

សំរាយបញ្ជាក់
សំរាយបញ្ជាក់មានលក្ខណៈស្រដៀងគ្នានឹងបទគន្លឹះ 4.2 ។ យើងជំនួសក្នុងម៉ាទ្រីស A ជួរឈរទី c_i និង c_k ដោយផលបូករបស់វា យើងបាន

$$\begin{aligned}0 &= \det||c_1,\cdots,c_i+c_k,\cdots,c_i+c_k,\cdots,c_n||\\ &= \det||c_1,\cdots,c_i,\cdots,c_i,\cdots,c_n|| + \det||c_1,\cdots,c_i,\cdots,c_k,\cdots,c_n||\\ &\quad + \det||c_1,\cdots,c_k,\cdots,c_i,\cdots,c_n|| + \det||c_1,\cdots,c_k,\cdots,c_k,\cdots,c_n||\end{aligned}$$

តាមលក្ខណៈ 4.2 នៃទ្រឹស្តីបទ 4.1 យើងបាន

$$\det ||c_1, \cdots, c_i, \cdots, c_k, \cdots, c_n|| = -\det ||c_1, \cdots, c_k, \cdots, c_i, \cdots, c_n||$$

ចំលាស់នៃជួរឈរ

គេមានម៉ាទ្រីសមួយ $A = ||c_1, \cdots, c_n||$ និង A' ជាម៉ាទ្រីសមួយទទួលបានដោយប្តូរលំដាប់នៃវ៉ិចទ័រនៃ A ។គេថាម៉ាទ្រីស A' ទទួលបានពី A ដោយចំលាស់នៃវ៉ិចទ័រជួរឈរ។ ឧទាហរណ៍ $A = ||c_1, c_2, c_3, c_4||$ និង $A' = ||c_4, c_3, c_1, c_2||$ ។

ការប្តូរគ្នារវាងជួរឈរពីរមានសារៈសំខាន់ណាស់។ គេអាចឆ្លងពីម៉ាទ្រីស A' ទៅ ម៉ាទ្រីស A ដោយចំលាស់បន្តបន្ទាប់។ វាមានលក្ខណៈស្តង់ដាដើម្បីធ្វើការផ្លាស់ប្តូរគ្នានេះដែលតំរូវអោយដាក់ដំបូងជួរឈរ c_1 នៅកន្លែងទីមួយរួច c_2 នៅកន្លែងទីពីរ ។ល។

ឧទាហរណ៍ 4.4.

$$A' = ||c_4, c_3, c_1, c_2||$$

ដោយប្តូរគ្នា c_1 និង c_4 យើងបាន

$$A'' = ||c_1, c_3, c_4, c_2||$$

ដោយប្តូរគ្នា c_2 និង c_3 យើងបាន

$$A'' = ||c_1, c_2, c_4, c_3||$$

ជាចុង ដោយប្តូរគ្នា c_3 និង c_4 យើងបាន

$$A = ||c_1, c_2, c_3, c_4||$$

ប្រមាណវិធីដែលតំរូវអោយប្តូររវាងគ្នាជួរឈរពីរ និងទុកអោយជួរឈរផ្សេងទៀតនៅនឹងហៅថាចំលាស់ទ្វេរធាតុ។ ដូច្នេះ ទៅនឹងចំលាសទ្វេធាតុនិមួយៗ ដេទេរមីណង់ប្តូរសញ្ញា *i.e.* $\det A' = (-1)^\tau \det A$ ដែល τ ជាចំនួនចំលាស់ចាំបាច់ដើម្បីឆ្លងពី A' ទៅ A ។ ជាពិសេស បើ $\det(A) = 0$ នោះ $\det(A') = 0$ ។
នៅក្នុងឧទាហរណ៍ 4.4 យើងបាន $\tau = 3$ និង ដូច្នេះ $\det A' = -\det A$ ។

ឧទាហរណ៍ 4.5. គណនា $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ។

យើងមាន

$$\begin{aligned} \Delta &= \det ||e_2, e_4, e_5, e_1, e_3|| \\ &= -\det ||e_1, e_4, e_5, e_2, e_3|| \\ &= \det ||e_1, e_2, e_5, e_4, e_3|| \\ &= -\det ||e_1, e_2, e_3, e_4, e_5|| \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

កំណត់ចំណាំទាំងនេះអាចអោយយើងបង្ហាញទ្រឹស្តីបទសំខាន់សំរាប់សញ្ញាណនៃដេទែរមីណង់។

ទ្រឹស្តីបទ 4.2. យក $A = ||c_1, \cdots, c_n|| \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ។ ដូច្នេះ វ៉ិចទ័រ $c_1, \cdots, c_n$ បង្កើតបានជាគោលនៃ $\mathbb{K}^n$ លុះត្រាតែ $\det A \neq 0$ ។
តាមបែបសមមូល យើងអាចនិយាយថា៖
ដេទែរមីណង់មួយស្មើនឹងសូន្យលុះត្រាតែ ជួរឈរមួយជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃជួរឈរផ្សេងទៀត។

សំរាយបញ្ជាក់

ឧបមាថាជួរឈរទី i សរសេរជាមន្សំលីនេអ៊ែរនៃជួរឈរផ្សេងទៀត *i.e.* មាន λ_j ($j = 1, 2, \cdots, n$ និង $j \neq i$) ដែល $c_i = \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j c_j$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា

$$\det A = ||c_1, \cdots, c_{i-1}, \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j c_j, c_{i+1}, \cdots, , c_n|| = 0$$

ដោយប្រើភាពលីនេអ៊ែរនៃដេទែរមីណង់ យើងបាន

$$\det A = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_i \det ||c_1, \cdots, c_{i-1}, c_j, c_{i+1}, \cdots, , c_n||$$

ចំពោះ $j = 1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n$ គេបាន $\det ||c_1, \cdots, c_{i-1}, c_j, c_{i+1}, \cdots, c_n|| = 0$ ។ ដូច្នេះយើងទាញបាន $\det A = 0$ ។
ច្រាសមកវិញ ឧបមាថា $\{c_1, \cdots, c_n\}$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{K}^n$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $\det ||c_1, \cdots, c_n|| \neq 0$ ។ បើ $\det ||c_1, \cdots, c_n|| = 0$ យើងនឹងបង្ហាញថាយើងទទួលបានភាពផ្ទុយពីការពិត។
$\{c_1, \cdots, c_n\}$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{K}^n$ ។ ដូច្នេះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $v \in \mathbb{K}^n$ សរសេរជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ $\{c_1, \cdots, c_n\}$ ។ យើងយក

$$v_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j c_j,\ v_2 = \sum_{k=1}^{n} b_k c_k,\ \cdots,\ v_n = \sum_{l=1}^{n} g_l c_l$$

ជា n វ៉ិចទ័រទូទៅនៃ $\mathbb{K}^n$ ។ ដោយប្រើភាពលីនេអ៊ែរធៀបនឹងជួរឈរនិមួយៗ យើងបាន

$$\begin{aligned} \det ||v_1, \cdots, v_n|| &= \det || \sum_{j=1}^{n} a_j c_j, \sum_{k=1}^{n} b_k c_k, \cdots, \sum_{l=1}^{n} g_l c_l || \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \cdots \sum_{l=1}^{n} a_j b_k \cdots g_l \det ||c_j, c_k, \cdots, c_l|| \end{aligned}$$

ដោយសារតែតួនិមួយៗនៃផលបូកមានទំរង់ $\alpha \det ||c_j, c_k, \cdots, c_l||$ (α ជាស្កាលែរមួយ និង $j, k, \cdots, l$ សន្ទស្សន៍នៃ $\{1, 2, \cdots, n\}$) ។ បើសន្ទស្សន៍ពីរស្មើគ្នានោះដេទែរមីណង់ស្មើនឹងសូន្យ។ បើសន្ទស្សន៍ទាំងអស់ផ្សេងគ្នា នោះ ម៉ាទ្រីស $||c_j, c_k, \cdots, c_l||$ ទទួលបានដោយចំលាស់នៃជួរឈរនៃម៉ាទ្រីស $||c_1, c_2, \cdots, c_n||$ និងដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីសចុងក្រោយនេះស្មើនឹងសូន្យ។ ដូច្នេះ $\det ||c_j, c_k, \cdots, c_l|| = 0$ រួច $\alpha \det ||c_j, c_k, \cdots, c_l|| = 0$ ។ យើងទាញបាន $\det ||v_1, \cdots, v_n|| = 0$ ។ លទ្ធផលនេះមិនអាចមានទេ ព្រោះ $v_1, v_2, \cdots, v_n$ ជាវ៉ិចទ័រទូទៅនៃ $\mathbb{K}^n$ ។ ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែយក $v_1, v_2, \cdots, v_n$ ជាគោលកាណូនិច $e_1, e_2, \cdots, e_n$ នៃ $\mathbb{K}^n$ ដើម្បីបាន $\det ||e_1, \cdots, e_n|| = \det I_n = 1$ ។

4.3 ចំលាស់ ចំលាស់ទ្វេធាតុ សញ្ញានៃចំលាស់

នៅក្នុងផ្នែកនេះ យើងលើកយកចំលាស់នៃសំណុំ $N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ។ សញ្ញាណនេះមានអត្ថប្រយោជន៍ក្នុងទ្រឹស្តីនៃដេទែរមីណង់។

និយមន័យ និង កំណត់សរសេរ 4.1. ចំលាស់នៃ $N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ σ ពី N_n ទៅ N_n ខ្លួនវា។ សំណុំនៃចំលាស់នៃ N_n តាង ដោយ S_n ។
ដូច្នេះ

$$\sigma \in S_n \quad \Leftrightarrow \quad \sigma : N_n \to N_n \text{ អនុវត្តន៍មួយទល់មួយ}$$

គេកំណត់សរសេរចំលាស់ σ ដោយ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

ដែលជួរដេកទីមួយជាតំលៃនៃអថេរ និង ជួរដេកទីពីរជារូបភាពនៃចំលាស់។

ឧទាហរណ៍ 4.6. ក្នុង S_1 គេមានចំលាស់ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ មានន័យថា $\sigma(1) = 1$ ។

ឧទាហរណ៍ 4.7. ក្នុង S_2 គេមានចំលាស់

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ 4.8. ក្នុង S_3 គេមានចំលាស់

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

លក្ខណៈ 4.1. ចំនួនចំលាស់នៃ N_n មាន $n!$ មានន័យថា $|S_n| = n!$ ។

និយមន័យ 4.2 (ផលគុណ រឺបណ្តាក់នៃចំលាស់). $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ យើងកំណត់បណ្តាត់ រឺ ផលគុណនៃ σ_1 ដោយ σ_2 ដោយ $\sigma_1 \circ \sigma_2$ រឺ $\sigma_1\sigma_2$ និងកំណត់ដោយ

$$\sigma_1 \circ \sigma_2(i) = \sigma_1(\sigma_2(i)) \tag{4.9}$$

ឧទាហរណ៍ 4.9. ក្នុង S_4 គេមាន $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ និង $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ។ កំណត់ $\sigma_1 \circ \sigma_2$ និង $\sigma_2 \circ \sigma_1$ ។

យើងមាន

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \circ \sigma_2(1) &= \sigma_1(\sigma_2(1)) = \sigma_1(4) = 2 \\
\sigma_1 \circ \sigma_2(2) &= \sigma_1(\sigma_2(2)) = \sigma_1(1) = 3 \\
\sigma_1 \circ \sigma_2(3) &= \sigma_1(\sigma_2(3)) = \sigma_1(2) = 1 \\
\sigma_1 \circ \sigma_2(4) &= \sigma_1(\sigma_2(4)) = \sigma_1(3) = 4
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ។

ដូចគ្នាដែរ

$$\begin{aligned}
\sigma_2 \circ \sigma_1(1) &= \sigma_2(\sigma_1(1)) = \sigma_2(3) = 2 \\
\sigma_2 \circ \sigma_1(2) &= \sigma_2(\sigma_1(2)) = \sigma_2(1) = 4 \\
\sigma_2 \circ \sigma_1(3) &= \sigma_2(\sigma_1(3)) = \sigma_2(4) = 3 \\
\sigma_2 \circ \sigma_1(4) &= \sigma_2(\sigma_1(4)) = \sigma_2(2) = 1
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ។

ចំណាំ 4.1. ក្នុងការអនុវត្តន៍ ដើម្បីគណនា $\sigma_1 \circ \sigma_2$ ជាដំបូងគេសរសេរ $\sigma_1 \circ \sigma_2$ ជាម៉ាទ្រីសមានបីជួរដេក និង n ជួរឈរ។ ជួរឈរទីមួយជាតំលៃអថេរ i ពី $1, 2, \cdots, n$ ។ នៅជួរដេកទីពីរគេសរសេរ រូបភាពនៃ σ_2 និង នៅជួរដេកចុងក្រោយ គេគណនារូបភាពនៃ σ_1 ដែលតំលៃនៃអថេរស្ថិតនៅជួរដេកទីពីរ។ ជាលទ្ធផលគេសរសេរ $\sigma_1 \circ \sigma_2$ ជាម៉ាទ្រីសមានពីជួរដេក និង n ជួរឈរ ដោយយកជួរដេកទីមួយ និង ជួរដេកចុងក្រោយ។

ឧទាហរណ៍ 4.10. ចំពោះឧទាហរណ៍ យើងបាន

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \sigma_2 \\ \sigma_1 \circ \sigma_2 \end{array} \end{array}$$

ដូចគ្នាដែរ

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \circ \sigma_1 \end{array} \end{array}$$

លក្ខណៈ និង និយមន័យ 4.1. សំណុំ S_n ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុងបណ្តាក់ $\circ$ ជាក្រុមមួយមិនត្រឡប់ មានន័យថា ចំពោះគ្រប់ $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ គេបាន

1. $(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3 = \sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3) = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$

2. $\exists id_{N_n} \in S_n,\ \sigma \circ id_{N_n} = id_{N_n} \circ \sigma = \sigma$

3. $\exists \sigma^{-1} \in S_N,\ \sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = id_{N_n}$

4. $\sigma_1 \circ \sigma_2 \neq \sigma_2 \circ \sigma_1$ ។

ក្រុមនេះហៅថាក្រុមចំលាស់ ។

ចំណាំ 4.2. ដើម្បីគណនា $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_p$ គេធ្វើការគណនាដូចបណ្ដាក់នៃពីចំលាស់ដែលបានអោយនៅក្នុងចំណាំ 4.1 ដោយគណនារូបភានៃ $\sigma_p, \sigma_{p-1}, \cdots, \sigma_1$ ។

ឧទាហរណ៍ 4.11. ក្នុង S_4 គេមានចំលាស់ $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ និង $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ។ គណនា $\sigma_1 \circ \sigma_\circ 2\sigma_3 \circ \sigma_4$ ។

យើងបាន

$$\begin{aligned} \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \sigma_4 \\ \sigma_3 \circ \sigma_4 \\ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 \\ \sigma_1 \circ \sigma_\circ 2\sigma_3 \circ \sigma_4 \end{array} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= id_{N_4} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ 4.12. ក្នុង S_5 គេមាន $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ។ គណនា σ^{-1} ។

យើងមាន

$$\begin{cases} \sigma(1) = 2 \\ \sigma(2) = 4 \\ \sigma(3) = 1 \\ \sigma(4) = 5 \\ \sigma(5) = 3 \end{cases}$$

ដូច្នេះ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} \sigma^{-1}(2) = 1 \\ \sigma^{-1}(4) = 2 \\ \sigma^{-1}(1) = 3 \\ \sigma^{-1}(5) = 4 \\ \sigma^{-1}(3) = 5 \end{cases}$$

សរុបមក $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ។

កំណត់សរសេរ 4.1. $\sigma \in S_n$ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ p មិនសូន្យ គេកំណត់យក

$$\sigma^p = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{\sigma \text{ មានចំនួន } p \text{ ដង}} = \sigma^{p-1} \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{p-1} \tag{4.10}$$

និង

$$\sigma^{-p} = \underbrace{\sigma^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ \cdots \circ \sigma^{-1}}_{\sigma^{-1} \text{ មានចំនួន } p \text{ ដង}} = \sigma^{-(p-1)} \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma^{-(p-1)} \tag{4.11}$$

ហើយ គេសន្មត់

$$\sigma^0 = id_{N_n} \tag{4.12}$$

ឧទាហរណ៍ 4.13. ចំពោះចំលាស់ $\sigma \in S_5$ នៃ ឧទាហរណ៍ 4.12 កំណត់ σ^2, σ^3, σ^4 σ^{-2}, σ^{-3}, σ^{-4} ។

យើងមាន

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sigma \circ \sigma \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \sigma \\ \sigma \circ \sigma \end{array} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
\sigma^3 &= \sigma^2 \circ \sigma \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \sigma \\ \sigma^2 \circ \sigma \end{array} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
\sigma^4 &= \sigma \circ \sigma^3 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \sigma^3 \\ \sigma \circ \sigma^3 \end{array} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
\sigma^{-2} &= \sigma^{-1} \circ \sigma^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \sigma^{-1} \\ \sigma^{-1} \circ \sigma^{-1} \end{array} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
\sigma^{-3} &= \sigma^{-1} \circ \sigma^{-2} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \sigma^{-2} \\ \sigma^{-1} \circ \sigma^{-2} \end{array} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^{-4} &= \sigma^{-3}\circ\sigma^{-1}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3\end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \sigma^{-1}\\ \sigma^{-3}\circ\sigma^{-1}\end{array}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

លក្ខណៈ 4.2. ចំពោះ $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ យើងបាន

$$(\sigma_1\circ\sigma_2)^{-1} = \sigma_2^{-1}\circ\sigma_1^{-1} \tag{4.13}$$

និយមន័យ 4.3 (ចំលាស់ទ្វេធាតុ). ចំលាស់ទ្វេធាតុមួយនៃ N_n ជាចំលាស់នៃ N_n ដែលប្តូរគ្នារវាងធាតុពីរផ្សេងគ្នា និង រក្សាធាតុដ៏ទៃទៀតនៅនឹង។ ចំលាស់ទ្វេធាតុនៃ N_n នឹងត្រូវតាងដោយ τ, t, $\cdots$ ។ល។

ឧទាហរណ៍ 4.14. ក្នុង S_5 គេយក $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$ និង $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$
។
τ និង t ជាចំលាស់ទ្វេធាតុ ចំណែកឯ σ ជាចំលាស់មិនទ្វេធាតុ។

លក្ខណៈ 4.3. ចំពោះ τ ជាចំលាស់ទ្វេធាតុនៃ N_n យើងបាន

$$\tau^2 = id_{N_n} \tag{4.14}$$

ជាពិសេស

$$\tau^{-1} = \tau \tag{4.15}$$

សំរាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា τ ជាចំលាស់ទ្វេធាតុនៃ N_n ដែលប្តូរគ្នារវាងធាតុពីរ i និង j ជាមួយនឹង $i < j$ ។ យើងអាចសរសេរ

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & j+1 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$\begin{aligned}
\tau^2 &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & j+1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n\end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \tau\\ \tau\circ\tau\end{array}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n\end{pmatrix}\\
&= id_{N_n}
\end{aligned}$$

ជាវិមាក $\tau\circ\tau = id_{N_n}$ មានន័យថា ចំរាសនៃ τ គឺ τ ខ្លួនវា។

សំណើ 4.1. គ្រប់ចំលាស់នៃ N_n អាចបំបែកជាផលគុណនៃចំលាស់ទ្វេធាតុ *i.e.* គ្រប់ σ នៃ S_n មានចំលាស់ទ្វេធាតុ $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_p$ ដែល

$$\sigma = \tau_1\circ\tau_2\circ\cdots\circ\tau_p \tag{4.16}$$

សំរាយបញ្ជាក់
យក $\sigma \in S_n$ ។ យើងនឹងបង្ហាញតាមវាចារណ៍ដោយកំណើនលើ n ។

1. ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន $\sigma(1) = 1$ ។ ដូច្នេះគ្មានអ្វីសំរាប់បង្ហាញទេ។

2. ឧបមាថាលក្ខណៈនេះពិតរហូតដល់លំដាប់ $n-1$ ។ យើងយកចំលាស់ σ មួយនៃ S_n ។ យក $k = \sigma(n)$ មានន័យថា
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n-1) & k \end{pmatrix}$$
ដូច្នេះ មានពីរករណីនឹងត្រូវបង្ហាញ។

i. ករណី $k = n$ យើងឃើញថា n ជាធាតុនឹងនៃ σ ។ ដូច្នេះវាជាចំលាស់នៃ $\{1, 2, \cdots, n\}$ ។ តាមសម្មតិកម្មកំណើន យើងបាន σ ជាផលគុណនៃចំលាស់ទ្វេធាតុ។

ii. ករណី $k \neq n$ យើងយក τ ចំលាស់ទ្វេធាតុដែលប្តូរធាតុគ្នារវាង k និង n ហើយយក $\sigma_1 = \tau \circ \sigma$ ។ យើងបាន
$$\sigma_1(n) = \tau \circ \sigma(n) = \tau(\sigma(n)) = \tau(k) = n$$
ដូច្នេះ σ_1 រក្សា n នៅនឹង ។ តាមការវិភាគនៃករណីមុន σ_1 បំបែកជាផលគុណនៃចំលាស់ទ្វេធាតុ *i.e.* $\sigma_1 = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$ ។
ដូច្នេះ យើងបាន
$$\tau \circ \sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$$
យើងទាញបាន
$$\tau^{-1} \circ \tau \circ \sigma = \tau^{-1} \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$$
ដោយសារតែ $\tau^{-1} \circ \tau = id_{N_n}$ និង $\tau^{-1} = \tau$ យើងទទួលបាន
$$\sigma = \tau \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$$

ឧទាហរណ៍ 4.15. ក្នុង S_4 គេអោយ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ។
យើងអាចសរសេរ
$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \tau_1 \text{ ចំលាស់ទ្វេធាតុដែលប្តូរគ្នា } 1 \text{ និង } 4 \\ \tau_2 \text{ ចំលាស់ទ្វេធាតុដែលប្តូរគ្នា } 1 \text{ និង } 2 \end{array} \\ &= \tau_2 \circ \tau_1 \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ 4.16. ក្នុង S_5 គេអោយ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ។

យើងអាចសរសេរ

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_2\end{aligned}$$

ដែល $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ និង $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ។
យើងក៏អាចសរសេរផងដែរ

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= t_1 \circ t_2 \circ t_3 \circ t_4 \circ t_5\end{aligned}$$

ដែល $t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $t_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ និង $t_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ។

ចំណាំ 4.3. ការបំបែកចំលាស់មួយជាផលគុណនៃចំលាស់ទ្វេធាតុមិនមានតែមួយទេ។

ទ្រឹស្តីបទ 4.3. σ ជាចំលាស់មួយ។ បើមានការបំបែកមួយនៃ σ ជាចំនួនគូ រៀងគ្នា ជាចំនួនសេសនៃចំលាស់ទ្វេធាតុ នោះគ្រប់ការបំបែកផ្សេងទៀតនៃ σ មានចំនួនគូ រៀងគ្នា ចំនួនសេសនៃចំលាស់ទ្វេធាតុ។
ជាវិបាក ចំនួន

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^p \tag{4.17}$$

ដែល p ជាចំនួនចំលាស់ទ្វេធាតុក្នុងការបំបែកមួយនៃ σ មិនអាស្រ័យនឹងការបំបែកទេ។ ចំនួននេះហៅថាសញ្ញានៃ σ ។

សំរាយបញ្ជាក់

តាមវិបាក 4.1 យើងទាញបានថាចំពោះគ្រប់ចំលាស់ទ្វេធាតុ τ នៃ $\{1, 2, \cdots, n\}$ យើងបាន

$$\det ||v_{\tau(1)}, \cdots, v_{\tau(n)}|| = -\det ||v_1, \cdots, v_n||$$

យក $\sigma \in S_n$ និង យើងអោយការបំបែកជាផលគុណនៃចំលាស់ទ្វេធាតុពីរនៃ σ

$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p \tag{4.18}$$

$$\sigma = t_1 \circ \cdots \circ t_q \tag{4.19}$$

យើងនឹងបង្ហាញថា $(-1)^p = (-1)^q$ ។
យក $\{e_1, \cdots, e_n\}$ ជាគោលកាណូនិចនៃ $\mathbb{K}^n$ និង Δ ជាដេទែរមីណង់កំណត់ដោយ

$$\Delta = \det ||e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}||$$

តាមការបំបែកទីមួយក្នុងរូបមន្ត 4.18 យើងបាន

$$\begin{aligned}\Delta &= \det ||e_{\tau_1\circ\tau_2\circ\cdots\circ\tau_p(1)}, \cdots, e_{\tau_1\circ\tau_2\circ\cdots\circ\tau_p(n)}||\\ &= -\det ||e_{\tau_2\circ\tau_3\circ\cdots\circ\tau_p(1)}, \cdots, e_{\tau_2\circ\cdots\circ\tau_p(n)}||\\ &= +\det ||e_{\tau_3\circ\cdots\circ\tau_p(1)}, \cdots, e_{\tau_3\circ\cdots\circ\tau_p(n)}||\\ &= \vdots\\ &= (-1)^p \det ||e_1, \cdots, e_n||\\ &= (-1)^p\end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរ ដោយប្រើការបំបែកទីពីរក្នុងរូបមន្ត 4.19 គេបាន $\Delta = (-1)^q$ ។
ដូច្នេះ យើងបាន $(-1)^p = (-1)^q$ មានន័យថា p និង q មានភាពគូដូចគ្នា ។

វិបាក 4.2.
1. បើ τ ជាចំលាស់ទ្វេធាតុមួយ នោះ $\varepsilon(\tau) = -1$
2. $\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2),\ \forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_n$
3. $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma),\ \forall \sigma \in S_n$
4. $\det ||v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)}|| = \varepsilon(\sigma) \det ||v_1, \cdots, v_n||,\ \forall \sigma \in S_n$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

1. តាមរូបមន្ត 4.17 ជាមួយនឹង $\sigma = \tau$ យើងបាន $\varepsilon(\tau) = (-1)^1 = -1$ ។
2. យក $\sigma_1 = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$ និង $\sigma_2 = t_1 \circ \cdots \circ t_q$ ។ យើងបាន
$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p \circ t_1 \circ \cdots \circ t_q$$
ដូច្នេះ
$$\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (-1)^{p+q} = (-1)^p(-1)^q = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$$
3. យក $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$ យើងបាន $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$ និង
$$\sigma^{-1} = \tau_p^{-1} \circ \cdots \circ \tau_1^{-1} = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_1$$
ដូច្នេះ $\varepsilon(\sigma^{-1}) = (-1)^p$ ។ យើងទាញបានលទ្ធផល $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma) = (-1)^p$ ។
4. សំរាយបញ្ជាក់ស្រដៀងគ្នានឹងសំរាយបញ្ជាក់នៃទ្រឹស្តីបទ 4.3 ។ យក $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$ ។ យើងបាន
$$\begin{aligned}\det ||v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)}|| &= \det ||v_{\tau_1\circ\tau_2\circ\cdots\circ\tau_p(1)}, \cdots, v_{\tau_1\circ\tau_2\circ\cdots\circ\tau_p(n)}||\\ &= -\det ||v_{\tau_2\circ\tau_3\circ\cdots\circ\tau_p(1)}, \cdots, v_{\tau_2\circ\cdots\circ\tau_p(n)}||\\ &= +\det ||v_{\tau_3\circ\cdots\circ\tau_p(1)}, \cdots, v_{\tau_3\circ\cdots\circ\tau_p(n)}||\\ &= \vdots\\ &= (-1)^p \det ||v_1, \cdots, v_n||\\ &= \varepsilon(\sigma) \det ||v_1, \cdots, v_n||\end{aligned}$$

4.4 ដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីសប្តូរជួរ

សំណើ 4.2. $A=(a_{ij})$ ជាម៉ាទ្រីសការេទំហំ n ។ យើងបាន

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} \tag{4.20}$$

សំរាយបញ្ជាក់

យើងផ្ទៀងផ្ទាត់រូបមន្ត (4.20) ចំពោះ $n=2,\,3$ និងធ្វើទូទៅកម្ម។

1. ចំពោះ $n=2$ នោះ$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=||c_1,c_2||$ ដែល c_1,c_2 ជាវ៉ិចទ័រជួរឈរនៃ $\mathbb{K}^2$ ។ យក $\{e_1,e_2\}$ ជាគោលកាណូនិចនៃ $\mathbb{K}^2$ យើងអាចសរសេរ

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{11}e_1+a_{21}e_2\\ c_2 &= a_{12}e_1+a_{22}e_2\end{aligned}$$

ដោយប្រើភាពពហុលីនេអ៊ែរនៃដេទែរមីណង់ យើងបាន

$$\begin{aligned}\det A &= \det||a_{11}e_1+a_{21}e_2,a_{12}e_1+a_{22}e_2||\\ &= \underbrace{a_{11}a_{12}\det||e_1,e_1||}_{0}+a_{11}a_{22}\det||e_1,e_2||+a_{21}a_{12}\det||e_2,e_1||\\ &\quad+\underbrace{a_{21}a_{22}\det||e_2,e_2||}_{0}\\ &= (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})\det||e_1,e_2||\\ &= a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ យើងឃើញសារជាថ្មីរូបមន្ត (4.3) ។

2. ចំពោះ $n=$ ។ យើងមាន $A=||c_1,c_2,c_3||$ ជាមួយនឹង

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{11}e_1+a_{21}e_2+a_{31}e_3 &=& \sum_{i=1}^{3}a_{i1}e_i\\ c_2 &= a_{12}e_1+a_{22}e_2+a_{32}e_3 &=& \sum_{j=1}^{3}a_{j2}e_j\\ c_3 &= a_{13}e_1+a_{23}e_2+a_{33}e_3 &=& \sum_{k=1}^{3}a_{k3}e_k\end{aligned}$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}\det A &= \det||\sum_{i=1}^{3}a_{i1}e_i,\sum_{j=1}^{3}a_{j2}e_j,\sum_{k=1}^{3}a_{k3}e_k||\\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3}a_{i1}a_{j2}a_{k3}\det||e_i,e_j,e_k||\end{aligned}$$

កាលណាសន្ទស្សន៍ពីរនៃ i, j, k ស្មើគ្នា នោះ តួត្រូវគ្នាស្មើនឹងសូន្យ (ព្រោះដេទែរមីណង់មានជួរឈរពីរស្មើគ្នា) ។ ដូច្នេះ នៅក្នុងផលបូកនៅសល់តែតួដែលត្រូវនឹងសន្ទស្សន៍ $\{i, j, k\}$ ជាមួយនឹង i, j, k ប្រែប្រួលរវាង 1 និង 3 ផ្សេងគ្នារវាងគ្នា មានន័យថាវាទាក់ទងនឹងគ្រប់ចំលាស់នៃ $\{1, 2, 3\}$ ។ ជាឧទាហរណ៍ គេយក (i, j, k) ស្មើនឹង $(3, 1, 2)$ រឺ $(1, 3, 2)$ ជាដើម។
ដោយប្តូរកំណត់សរសេរ និង ដោយយក

$$i = \sigma(1),\ j = \sigma(2),\ k = \sigma(3) \text{ ជាមួយនឹង } \sigma \in S_3$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma\in S_3} a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}\det||e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}|| \\
&= \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}\underbrace{\det||e_1, e_2, e_3||}_{1} \\
&= \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}
\end{aligned}$$

3. ជាទូទៅ ចំពោះ $n \geq 3$ យើងមាន $A = ||c_1, c_2, \cdots, c_n||$ ជាមួយនឹង

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n = \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}e_{i_1} \\
c_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n = \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1 2}e_{i_2} \\
&\vdots \\
c_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n = \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}e_{i_n}
\end{aligned}$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}
\det A &= \det||\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1 2}e_{i_2}, \cdots, \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}e_{i_n}|| \\
&= \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n=1}^{n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}\det||e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}||
\end{aligned}$$

ដូចករណីខាងលើដែ កាលនាសន្ទសន្ទស្សន៍ពីរនៃ $i_1, i_2, \cdots, i_n$ ស្មើគ្នា នោះ តួត្រូវគ្នាស្មើនឹងសូន្យ ដូច្នេះ នៅក្នុងផលបូកនៅសល់តែតួដែលត្រូវនឹងសន្ទស្សន៍ $\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ ជាមួយនឹង $i_1, i_2, \cdots, i_n$ ប្រែប្រួលរវាង 1 និង n ផ្សេងគ្នារវាងគ្នា មានន័យថាវាទាក់ទងនឹងគ្រប់ចំលាស់នៃ $\{1, 2, \cdots, n\}$ ។
ដោយប្តូរកំណត់សរសេរ និង ដោយយក

$$i_1 = \sigma(1),\ i_2 = \sigma(2),\ \cdots,\ i_n = \sigma(n) \text{ ដែល } \sigma \in S_n$$

យើងអាចសរសេរ

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}\det\|e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\cdots,e_{\sigma(n)}\| \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}\underbrace{\det\|e_1,e_2,\cdots,e_n\|}_{1} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ 4.17. យើងនឹងបង្ហាញឧទាហរណ៍ចំពោះករណី $n=3$ ។ ជាដំបូង យើងរកចំលាស់ទាំងអស់នៃ $\{1,2,3\}$ ។ យើងបាន

$$S_3=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\tau_1,\tau_2,\tau_3\}$$

ដែល

$$\sigma_1=id=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

និង

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ \tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ \tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

យើងផ្ទៀងផ្ទាត់បានដោយងាយថា $\varepsilon(\sigma_i)=1$ និង $\varepsilon(\tau_i)=-1$ ចំពោះ $i=1,2,3$ ។
ដូច្នេះ យើងបាន

$$\det A=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}$$

ដូច្នេះ យើងឃើញសារជាថ្មីរូបមន្តសារូស (4.4) ។

ទ្រឹស្តីបទ 4.4. យក $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ និង ${}^tA$ ជាម៉ាទ្រីសប្តូរជួររបស់វា។ យើងបាន

$$\det({}^tA)=\det A \tag{4.21}$$

សំរាយបញ្ជាក់

យើងសរសេរ $A=\|a_{ij}\|$ ។ តាមរូបមន្ត 4.20 យើងបាន

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

ដោយសារតែ $\mathbb{K}$ ជាកាយមានលក្ខណៈត្រឡប់ គេអាចធ្វើចំលាស់ណាមួយលើតួនៅអង្គទីពីរ។ ជាឧទាហរណ៍ គេអាចធ្វើចំលាស់ពីរកត្តាដំបូង

$$a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(\sigma(n)n)}=a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

បើ τ ជាចំលាស់ទ្វេធាតុដែលប្តូរគ្នារវាង 1 និង 2 គេអាចសរសេរ

$$a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(\sigma(n)n)}=a_{\sigma(\tau(1))\tau(1)}a_{\sigma(\tau(2))\tau(2)}\cdots a_{\sigma(\tau(n))\tau(n)}$$

ជាទូទៅ ចំពោះគ្រប់ចំលាស់ $\rho \in S_n$ គេបាន

$$a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} = a_{\sigma(\rho(1))\rho(1)}a_{\sigma(\rho(2))\rho(2)}\cdots a_{\sigma(\rho(n))\rho(n)}$$

ជាពិសេស ចំពោះ $\rho = \sigma^{-1}$ យើងបាន

$$a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} = a_{1\rho(1)}a_{2\rho(2)}\cdots a_{n\rho(n)}$$

ម៉្យាងវិញទៀត $\varepsilon(\rho) = \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$ ។
ដូច្នេះយើងបាន

$$\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} = \varepsilon(\rho)a_{1\rho(1)}a_{2\rho(2)}\cdots a_{n\rho(n)}$$

កាលណា σ ជាធាតុនៃ S_n នោះ $\rho = \sigma^{-1}$ ក៏ជាធាតុនៃ S_n ដែរ។ ដូច្នេះ យើងបាន

$$\det A = \sum_{\rho\in S_n} \varepsilon(\rho)a_{1\rho(1)}a_{2\rho(2)}\cdots a_{n\rho(n)}$$

ដោយសារតែ ${}^tA = ||b_{ij}||$ ជាមួយនឹង $b_{ij} = a_{ji}$ ។ ដូច្នេះ យើងបាន

$$\begin{aligned}\det({}^tA) &= \sum_{\rho\in S_n} \varepsilon(\rho)b_{\rho(1)1}b_{\rho(2)2}\cdots b_{\rho(n)n}\\ &= \sum_{\rho\in S_n} \varepsilon(\rho)a_{1\rho(1)}a_{2\rho(2)}\cdots a_{n\rho(n)}\end{aligned}$$

យើងទាញបាន $\det({}^tA) = \det A$ ។

វិបាក 4.3 (វិធាននៃភាពឌុយអាល់). គ្រប់លក្ខណៈទាំងអស់នៃដេទែរមីណង់ធៀបនឹងជួរឈរអាចត្រូវអះអាងបានចំពោះជួរដេក។

ដូច្នេះលក្ខណៈដែលបានចែងនៅក្នុងទ្រឹស្តីបទ 4.1 វិបាក 4.1 និងទ្រឹស្តីបទ 4.2 មានបំណកស្រាយឌុយអាល់ខាងក្រោម។

ទ្រឹស្តីបទ 4.5. 1. ដេទែរមីណង់ជាអនុគមន៍ពហុលីនេអ៊ែរនៃជួរដេកនិមួយៗ។

2. បើម៉ាទ្រីសមួយមានជួរដេកពីរស្មើគ្នានោះដេទែរមីណង់របស់វាស្មើនឹងសូន្យ។

3. បើគេប្តូរគ្នារវាងជួរដេកពីរ នោះដេទែរមីណង់ប្តូរសញ្ញា។

4. ដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីសមួយមិនសូន្យលុះត្រាតែវិចទ័រជួរដេករបស់វាមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។
   រឺតាមបែបសមូល យើងអាចនិយាយបានថា
   ដេទែរមីណង់មួយស្មើនឹងសូន្យលុះត្រាតែវិចទ័រជួរដេកមួយជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃវិចទ័រជួរដេកផ្សេងទៀត។

4.5 ការគណនានៃដេទែរមីណង់

និយមន័យ 4.4. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ ។ គេហៅថាកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ a_{ij} ជាចំនួនស្កាលែរ

$$\textit{cof}(a_{ij}) := (-1)^{i+j} \det A_{ij} \tag{4.22}$$

ដែល A_{ij} ជាម៉ាទ្រីសទទួលបានដោយលុបជួរដេកទី i និង ជួរឈរទី j ។

ឧទាហរណ៍ 4.18. គេមាន $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ។ យើងបាន $\textit{cof}(1) = +\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10$ និង $\textit{cof}(0) = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -16$ ។

ចំណាំ 4.4. 1. សញ្ញា $(-1)^{i+j}$ នៅក្នុងនិយមន័យនៃកូហ្វាក់ទ័រត្រូវបានកំណត់ដោយគំនូសបំព្រួញខាងក្រោម

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

2. ជាមួយនឹងសញ្ញាណនេះ រូបមន្ត 4.2 ក្នុងនិយមន័យ 4.1 សរសេរ

$$\det A = a_{11}\textit{cof}(a_{11}) + a_{12}\textit{cof}(a_{12}) + \cdots + a_{1n}\textit{cof}(a_{1n}) \tag{4.23}$$

ទ្រឹស្តីបទ 4.6. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ ។ យើងបានរូបមន្តនៃការពន្លាតនៃដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីស A ទៅតាមជួរដេកទី j

$$\det A = a_{j1}\textit{cof}(a_{j1}) + a_{i2}\textit{cof}(a_{j2}) + \cdots + a_{jn}\textit{cof}(a_{jn}) \tag{4.24}$$

និង រូបមន្តនៃការពន្លាតនៃដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីស A ទៅតាមជួរឈរទី j

$$\det A = a_{1j}\textit{cof}(a_{1j}) + a_{2j}\textit{cof}(a_{2j}) + \cdots + a_{nj}\textit{cof}(a_{nj}) \tag{4.25}$$

សំរាយបញ្ជាក់

យើងគ្រាន់តែបង្ហាញរូបមន្តនៃការពន្លាតតាមជួរដេកទី i ។ ចំណែកឯរូបមន្តនៃការព្លាតតាមជួរឈរទី j ត្រូវបានទទួលតាមភាពឌុយអាល់ មានន័យថា ដោយជំនួស A ដោយ ${}^tA$ ។

យក $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ និង B ជាម៉ាទ្រីសបានដោយប្តូរគ្នាជួរដេកទីមួយ និង ជួរដេកទី i នៃ A ។

យើងសរសេរ

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jk} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow \text{ជួរដេកទី } j \\ \\ \\ \end{array}$$

ដូច្នេះចំពោះ $k=1,\cdots,n$

$$b_{1k}=a_{jk},\, b_{jk}=a_{1k} \text{ និងបើ } i\neq 1 \text{ និង } i\neq j\ ,\ b_{ik}=a_{ik}$$

យើងពន្លាត B តាមជួរដេកទីមួយ

$$\begin{aligned}\det B &= 11cof(b_{11})+b_{12}\mathsf{cof}(b_{12})+\cdots+1ncof(b_{1n})\\ &= a_{j1}\mathsf{cof}(b_{11})+a_{j2}\mathsf{cof}(b_{12})+\cdots+a_{jn}\mathsf{cof}(b_{1n})\end{aligned}$$

ចំពោះ $k=1,2,\cdots,n$ យើងគណនា $cof(b_{1k})$ ។
យើងបាន

$$\begin{aligned}\mathsf{cof}(b_{1k}) &= (-1)^{1+k}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{ ជួរដេកទី } j\\ \\ \\ \end{array}\\ &= (-1)^{1+k}\begin{vmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn}\\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{ ជួរដេកទី } j\\ \\ \\ \end{array}\\ &= (-1)^{1+k}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow \text{ ជួរដេកទី } j-1\\ \\ \\ \end{array}\end{aligned}$$

ឥឡូវនេះ បើគេធ្វើអោយបានជួរដេកទី $j-1$ ទៅជួរដេកទីមួយដោយធ្វើការប្តូរគ្នា $j-2$ ដងជាមួយជួរដេកទី

$j-2$ ដែលនៅខាងមុនជួរដេកទី $j-1$ យើងនឹងបាន

$$\begin{aligned}
cof(b_{1k}) &= (-1)^{1+k+(j-2)}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\\
&= -(-1)^{j+k}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\\
&= -\mathrm{cof}(a_{jk})
\end{aligned}$$

យើងទាញបាន

$$\det B = -\left(a_{j1}\mathrm{cof}(a_{j1}) + a_{j2}\mathrm{cof}(a_{j2}) + \cdots + a_{jn}\mathrm{cof}(a_{jn})\right)$$

ដោយសារតែ $\det B = -\det A$ ។ ដូច្នេះ យើងទទួលបានរូបមន្ត (4.23) ។

ឧទាហរណ៍ 4.19. គេអោយ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ។ គណនា $\det A$ ដោយប្រើការពន្លាតតាមជួរដេកទីបី រួច តាមជួរឈរទីបី។

1. ការពន្លាតតាមជួរដេកទីបី

$$\begin{aligned}
\det A &= 1\begin{vmatrix} -2 & 3\\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2\\ 2 & 1 \end{vmatrix}\\
&= -3-6+10\\
&= 1
\end{aligned}$$

2. ការពន្លាតតាមជួរឈរទីបី

$$\begin{aligned}
\det A &= +3\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & -2\\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2\\ 2 & 1 \end{vmatrix}\\
&= -9+10\\
&= 1
\end{aligned}$$

ការគណនានៃដេទែរមីណង់មួយមានបង្ហាញភាពស្មុគ្រស្មាញទេ។ ប៉ុន្តែវាអាចមានរយៈពេលយូរ។ ផលបូកដែលមាននៅក្នុងរូបមន្ត 4.20 មានចំនួនតួច្រើនដូចចំនួនចំលាស់ក្នុង S_n ដែរ មានន័យថា មាន $n!$ (ចំពោះ $n=5$ នោះមាន 120 តួ) ។
ប៉ុន្តែទ្រឹស្តីបទ 4.1 និងបំណាកស្រាយឧយអាល់ 4.5 អនុញ្ញាត្តិអោយសំរួលការណនា។ ដូច្នេះ គេប្រើលក្ខណៈខាងក្រោម។

សំណើ 4.3. ដេទែមីណង់មិនប្រែប្រួលទេបើទៅនឹងជួរដេកមួយ រៀងគ្នា ជួរឈរមួយ គេបន្ថែមបន្សំលីនេអ៊ែរមួយនៃជួរដេកផ្សេងទៀត រៀងគ្នា បន្សំលីនេអ៊ែរមួយនៃជួរឈរផ្សេងទៀត។

សំរាយបញ្ជាក់
យក $v_1, v_2, \cdots, v_n$ ជាវ៉ិចទ័រជួរឈរនៃ $\mathbb{K}^n$ ។ យើងបន្ថែមទៅលើជួរដេកទី j បន្សំលីនេអ៊ែរនៃជួរដេកផ្សេងទៀត។

$$\begin{aligned}\det\|v_1, \cdots, v_i + \sum_{j\neq i}\lambda_j v_j, \cdots, v_n\| &= \det\|v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_n\| \\ &\quad + \sum_{j\neq i}\lambda_j \det\|v_1, \cdots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_n\| \\ &= \det\|v_1 \cdots, v_i, \cdots,_n\|\end{aligned}$$

ព្រោះក្នុងផលបូក តួនិមួយស្មើនឹងសូន្យដោយសារតែវាមានជួរឈរពីរស្មើគ្នា។
ក្នុងការអនុវត្តន៍ ដើម្បីគណនាដេទែរមីណង់ គេប្រលក្ខណៈ 4.3 ដើម្បីធ្វើអោយមានសូន្យច្រើនលើជួរដេក រឺជួរឈរ។

ឧទាហរណ៍ 4.20. គណនា $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ ។

យើងបាន

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \ell_1 = \ell_1 \\ \ell_2 = \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 = \ell_3 - 2\ell_1 \\ \ell_4 = \ell_4 + \ell_1 \\ \ell_5 = \ell_5 \end{array}$$

ដោយពន្លាតតាមជួរឈរទីមួយ យើងបាន

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -5 & -6 \\ -2 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

ដោយគណនា $c_1^{(1)} = c_1$, $c_2^{(1)} = c_2 + c_1$, $c_3^{(1)} = c_3 + c_1$ និង $c_4^{(1)} = c_4$ គេបាន

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

ដោយពន្លាតតាមជួរដេកទីមួយ យើងបាន

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 6\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 6(6-14) \\ &= -48\end{aligned}$$

4.6 ដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីសផលគុណ ដេទែរមីណង់នៃអង់ដូម័រភីស

ទ្រឹស្តីបទ 4.7. ចំពោះគ្រប់ $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ គេបាន

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \tag{4.26}$$

សំរាយបញ្ជាក់
យើងយក

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = ||a_1, \cdots, a_n|| \\ B &= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = ||b_1, \cdots, b_n|| \end{aligned}$$

និង

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = ||c_1, \cdots, c_n||$$

ដែល $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ik}$ ។

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} c_k &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jk} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \\ &= b_{1k}a_1 + \cdots + b_{nk}a_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_{jk}a_j \end{aligned}$$

ដូច្នេះយើងបាន

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det ||c_1, \cdots, c_n|| \\ &= \det ||\sum_{j=1}^{n} b_{j1}a_j, \sum_{i=1}^{n} b_{l2}a_l, \cdots, \sum_{i=1}^{n} b_{in}a_i|| \\ &= \sum_{j,l,\cdots,i=1}^{n} b_{j1}b_{l2}, \cdots, b_{in} det ||a_j, a_l, \cdots, a_i|| \end{aligned}$$

ដោយវាចារណ៍ដូចក្នុងសំរាយបញ្ជាក់នៃសំណើ 4.20 យើងឃើញថាតួនៃផលបូកនេះជាមួយនឹង $j, l, \cdots, i$ មិនផ្សេងគ្នាទាំងអស់ស្មើនឹងសូន្យ។ នៅសល់តួជាមួយ $j, l, \cdots, i$ ប្រែប្រួលពី 1 ទៅ n និងផ្សេងគ្នាទាំងអស់រវាងគ្នា មានន័យថា $\{j, l, \cdots, i\}$ ជាចំលាស់នៃ $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ ។ ដូច្នេះដោយសរសេរ $j = \sigma(1), l = \sigma(2), \cdots, i = \sigma(n)$ ជាមួយនឹង $\sigma \in S_n$ យើងបាន

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1}, \cdots, b_{\sigma(n)n} \det ||a_{\sigma(1), \cdots, a_{\sigma(n)}}|| \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1}, \cdots, b_{\sigma(n)n} \det ||a_1, \cdots, a_n|| \\ &= \det B \cdot \det A \end{aligned}$$

វិបាក 4.4.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ មានចំរាស់លុះត្រាតែ $\det A \neq 0$ និងគេបាន

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \tag{4.27}$$

សំរាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា A មានចំរាស់។ ដូច្នេះមាន $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ដែល $AA^{-1} = I$ ។
ដូច្នេះយើងបាន $\det(AA^{-1}) = 1$ ។ ជាវិបាក $(\det A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ ។
ដូច្នេះ $\det A \neq 0$ និង $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ ។
ច្រាសមកវិញ យក $A = ||c_1, \cdots, c_n||$ និង ឧបមាថា $\det A \neq 0$ ។ វ៉ិចទ័រជួរឈរ $c_1, \cdots, c_n$ នៃ A បង្កើត

បានជាគោលមួយនៃ K^n ។ ដោយយក $e_1, \cdots, e_n$ ជាគោលកាណូនិចនៃ $\mathbb{K}^n$ យើងបាន $A = P_{e_i \to c_i}$ ជាម៉ាទ្រីសប្តូរគោលពីគោល (e_i) ទៅ (c_i) ។ ម៉ាទ្រីសនេះមានចំរាស់។ ដូច្នេះ A មានចំរាស់។

វិបាក 4.5. $A,\ A' \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ ។ A និង A' ជាម៉ាទ្រីសដូចគ្នា (ម៉ាទ្រីសំណាងអង់ដូម័រភីសតែមួយក្នុងគោលផ្សេងគ្នា) នោះ $\det A = \det A'$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

$A,\ A' \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ ជាម៉ាទ្រីសពីរដូចគ្នា នោះមានម៉ាទ្រីស $P \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ មានចំរាស់ដែល $A' = P^{-1}AP$ ។ ដូច្នេះ យើងបាន

$$\begin{aligned} \det A' &= \det(P^{-1}AP \\ &= \det P^{-1} \det A) \det P \\ &= \frac{1}{\det P} \det A \det P \\ &= \det A \end{aligned}$$

វិបាកនេះ អនុញ្ញាត្តិអោយដាក់និយមន័យខាងក្រោម។

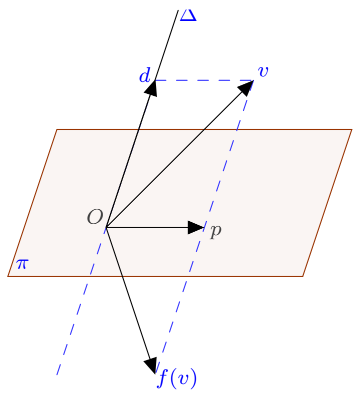
និយមន័យ 4.5. E ជាលំហរ៉ិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់ និង f ជាអង់ដូម័រភីសមួយនៃ E ។ គេហៅថាដេទែរមីណង់នៃ f គឺជាដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីសតំណាង f ក្នុងគោលណាមួយនៃ E ។
ដូច្នេះ

$$\det f = \det\left(M(f)_{e_i}\right) \tag{4.28}$$

ដែល (e_i) ជាគោលមួយនៃ E ។

ឧទាហរណ៍ 4.21. គណនាដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីស A ដែលតំណាងក្នុងគោលកាណូនិចនៃ $\mathbb{R}^3$ បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងប្លង់ π សមីការ $\frac{1}{3}x + 2y + 3z = 0$ ស្របនឹងបន្ទាត់ Δ សមីការ $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z$ ។

យក f ជាបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងប្លង់ π ស្របនឹងបន្ទាត់ Δ ។ យក $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ និង $v' = (x', y', z') = f(x, y, z)$ និង $p = (x_p, y_p, z_p)$ ជាចំណោលនៃ x លើប្លង់ π ស្របនឹងបន្ទាត់ Δ ។



រូប 4.1:

បន្ទាត់ Δ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $(3,2,1)$ ដូច្នេះ យើងកំណត់ $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ដើម្បីអោយវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $d = \lambda(3,2,1)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$p + d = v \tag{4.29}$$

និង

$$v + f(v) = 2p \tag{4.30}$$

យើងឃើញថាសមីការ (? ?) អាចសរសេរ

$$v - d = p \tag{4.31}$$

វ៉ិចទ័រ $v - d = (x - 3\lambda, y - 2\lambda, z - \lambda)$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ π យើងបាន

$$\frac{1}{3}(x - 3\lambda) + 2(y - 2\lambda) + 3(z - \lambda) = 0$$

យើងទាញបាន

$$\lambda = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}x + 2y + 3z\right)$$

ដោយប្រើសមីការ (4.31) យើងទទួលបាន

$$p = \frac{1}{8}\left(7x - 6y - 9z, -\frac{2}{3}x + 4y - 6z, -\frac{1}{3}x - 2y + 5z\right)$$

ដោយប្រើសមីការ (4.30) យើងទទួលបាន

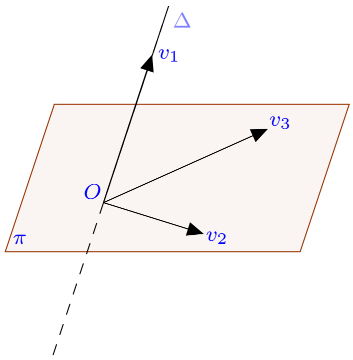
$$f(v) = \frac{1}{4}\left(3x - 6y - 9z, -\frac{2}{3}x + 5z, -\frac{1}{3}x - 2y + z\right)$$

ដូច្នេះ ចំពោះគោលកាណូនិច (e_1, e_2, e_3) យើងបាន

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \frac{1}{12}(9, -2, -1) \\ f(e_2) &= \frac{1}{12}(-18, 0, -6) \\ f(e_3) &= \frac{1}{12}(-27, -18, 3) \end{aligned}$$

ជាវិបាក យើងបាន $A = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & -18 & -27 \\ -2 & 0 & -18 \\ -1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ រួច $\det A = -1$ ។

របៀបម្យ៉ាងទៀត យើងអាចគណនាដេទែរមីណង់នៃបំលែងឆ្លុះ f ដោយយកគោល (v_1, v_2, v_3) នៃ $\mathbb{R}^3$ ដែល v_1 ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ Δ ហើយវ៉ិចទ័រ v_2 និង v_3 ជាវ៉ិចទ័រមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នានៃប្លង់ π ។



រូប 4.2:

ដោយ f ជាបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងប្លង់ π ស្របនឹងបន្ទាត់ Δ ។ យើងបាន

$$\begin{aligned} f(v_1) &= -v_1 \\ f(v_2) &= v_2 \\ f(v_3) &= v_3 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$M(f)_{v_i} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

យើងទាញបាន $\det f = -1$ ។

4.7 ការគណនាចំរាសនៃម៉ាទ្រីសមួយ

ទ្រឹស្តីបទ 4.8. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ និង $cof(^tA)$ ជាម៉ាទ្រីសទទួលបានពី ^tA ដោយជំនួសធាតុនិមួយៗរបស់វា ដោយកូហ្វាក់ទ័ររបស់វា។ ដូច្នេះ គេបាន

$$A\, cof(^tA) = cof(^tA)A = (\det A)I \tag{4.32}$$

ជាពិសេស បើ A មានចំរាស់ មានន័យថា $\det A \neq 0$ យើងបាន

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} cof(^tA) \tag{4.33}$$

សំរាយបញ្ជាក់
យើងយក

$$\Delta_{jk} = a_{j1}\text{cof}(a_k1) + a_{j2}\text{cof}(a_{k2}) + \cdots + a_{jn}\text{cof}(a_{kn})$$

យើងឃើញថា

1. បើ $k = j$ នោះ $\Delta_{jk} = \det A$ ។

2. $k \neq j$ នោះ $\Delta_{jk} =$ ដោយហេតុថា យក $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ ជាម៉ាទ្រីសទទួលបានពី A ដោយជំនួសជួរដេកទី k ដោយជួរដេកទី j មានន័យថា $b_{kp} = a_{jp}$ និង $b_{jp} = a_{jp}$ ចំពោះ $p = 1, 2 \cdots$ ។ ដូច្នេះ យើងបាន $\det B = 0$ ព្រោះ B មានជួរដេកពីរស្មើគ្នា។
ដូច្នេះ

$$0 = \det B = b_{k1}\text{cof}(b_{k1}) + \cdots + b_{kn}\text{cof}(b_{kn}) \tag{4.34}$$

$$= a_{j1}\text{cof}(a_{k1}) + \cdots + a_{jn}\text{cof}(a_{kn}) \tag{4.35}$$

ព្រោះ $\text{cof}(b_{kp}) = \text{cof}(a_{kp})$ ចំពោះ $p = 1, 2 \cdots$ ។ សរុប យើងបាន

$$\Delta_{jk} = \delta_{jk} \det A \tag{4.36}$$

ដែល δ_{jk} ជានិម្មិតសញ្ញា Kronecker កំណត់ដោយ

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{បើ} \quad j = k \\ 0 & \text{បើ} \quad j \neq k \end{cases} \tag{4.37}$$

នៅក្នុងរូបមន្ត (4.34) យើងឃើញថា អង្គទីមួយ Δ_{jk} ជាតួនៃជួរដេកទី j និងជួរឈរទី k នៃ $A({}^t\text{cof}\, A)$ និងអង្គទីពីរ $\delta_{jk} \det A$ ជាតួនៃជួរដេកទី j និងជួរឈរទី k នៃ $(\det A)I$ ។ ដូច្នេះ យើងបាន

$$A({}^t\text{cof}\, A) = (\det A)I$$

ដោយសារតែ $\text{cof}({}^tA) = {}^t\text{cof}(A)$ យើងបាន $A\,\text{cof}({}^tA) = (\det\ A)I$ ។
តាមបែបដូចគ្នាដែរ យើងអាចបង្ហាញថា $\text{cof}({}^tA)\, A = I$ ។
ដូច្នេះរូបមន្ត (4.32) ត្រូវបានបកស្រាយ។
ជាពិសេស បើ A មានចំរាស រូមន្តនេះអាចសេរសេរ

$$A\left(\frac{1}{\det A}\text{cof}({}^tA)\right) = \left(\frac{1}{\det A}\text{cof}({}^tA)\right)A = I$$

យើងទាញបានរូបមន្ត (4.33) នៃទ្រឹស្តីបទ 4.8 ត្រូវបានបកស្រាយ។

ឧទាហរណ៍ 4.22. គេអោយម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ។ យើងបាន $\det A = 5 \neq 0$ ។ ដូច្នេះ A មានចំរាស់។
យើងបាន ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ យើងបានកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុនិមួយៗរបស់វា $cof(1) = 3$, $cof(-1) = -2$, $cof(2) = 1$ និង $cof(3) = 1$ ។
ដូច្នេះ

$$cof({}^tA) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

រួច យើងបាន

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ជាទូទៅ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ជាមួយនឹង $ad - bc \neq 0$ យើងបាន

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

ឧទាហរណ៍ 4.23. គេអោយម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ។ យើងបាន $\det A = -3 - 2 = -5 \neq 0$ ។ ដូច្នេះ A មានចំរាស់។

យើងបាន ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ដោយគណនាកូហ្វាក់ទ័រនៃមេគុណនៃជួរដេកទីមួយ យើងរកឃើញ

$$\begin{aligned} \textit{cof}(1) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \\ \textit{cof}(-1) &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \\ \textit{cof}(0) &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

ដោយគណនាកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុផ្សេងទៀត យើងបាន

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

4.8 ការអនុវត្តនដេទែរមីណង់ទៅនឹងទ្រឹស្តីនៃរ៉ង់

4.8.1 ការកំណត់គោល

យើងបានដឹងហើយថា ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះ 4.2 អះអាងថា វ៉ិចទ័រ $(v_1, \cdots, v_n)$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{K}^n$ លុះត្រាតែ $\det ||v_1, \cdots, v_n|| \neq 0$ ។

លទ្ធផលនេះអាចបន្លាយទៅនឹងលំហវ៉ិចទ័រណាមួយ E មានវិមាត្រ n ។ ដោយហេតុថា ការជ្រើសរើសគោល $(e_1, \cdots, c_n)$ នៃ E អនុញ្ញាត្តិអោយប្រដូចE ទៅនឹង $\mathbb{K}^n$ ដោយអ៊ីសូមរភីស

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \rightarrow & \mathbb{K}^n \\ & v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n & \rightarrow & (x_1, \cdots, x_n) \end{array}$$

ដូច្នេះវ៉ិចទ័រ $(v_1, \cdots, v_n)$ ជាគោលមួយនៃ E លុះត្រាតែ $\varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_n)$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{K}^n$ ហើយជាទូទៅ $\mathrm{Rg}(v_1, \cdots, v_n) = \mathrm{Rg}(\varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_n))$ ។ ដូច្នេះទ្រឹស្តីបទ 4.2 មានទូទៅកម្មដូចខាងក្រោម។

ទ្រឹស្តីបទ 4.9. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រ n ។
វ៉ិចទ័រ $(v_1, \cdots, v_n)$ នៃ E ជាគោលមួយនៃ E លុះត្រាតែ

$$\det ||v_1, \cdots, v_n||_{e_i} \neq 0 \tag{4.39}$$

ដែល $||v_1, \cdots, v_n||_{e_i}$ ជាម៉ាទ្រីសដែលជួរឈររបស់វាជាកុំប៉ូសង់នៃ $v_1, \cdots, v_n$ ក្នុងគោល (e_i) នៃ E ។

ឧទាហរណ៍ 4.24. វ៉ិចទ័រ $v_1 = 1 + x$, $v_2 = x + x^2$ និង $v_3 = 1 + x^2$ ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}_2[x]$ ។
ដោយហេតុថា ដោយយក (e_1, e_2, e_3) ជាគោលកាណូនិចនៃ $R_2[x]$ យើងបាន

$$\det ||v_1, v_2, v_3||_{e_i} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

នៅក្នុងផ្នែកខាងមុខ យើងកំណត់ $||v_1, \cdots, v_n||$ ជាម៉ាទ្រីសដែលជួរឈររបស់វាជាកុំប៉ូសង់ $v_1, \cdots, v_n$ ក្នុងគោលនៃ E ។

4.8.2 ការបង្ហាញនៃគ្រួសារនៃវ៉ិចទ័រមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ

ទ្រឹស្តីបទ 4.10. $v_1, \cdots, v_r$ ជា r នៃលំហវ៉ិចទ័រ E មួយមានវិមាត្រ n ($r \leq n$) និង $A = ||v_1, \cdots, v_r||$ ជាម៉ាទ្រីសដែលជួរឈររបស់វាជាកុំប៉ូសង់ $v_1, \cdots, v_n$ ក្នុងគោលនៃ E ($A \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$) ។
គ្រួសារ $(v_1, \cdots, v_r)$ ជាវ៉ិចទ័រសេរី លុះត្រាតែគេអាចទាញពី A បានមីន័រមួយលំដាប់ r មិនសូន្យ។

សំរាយបញ្ជាក់

ដោយសារតែ E អ៊ីសូមរនឹង $\mathbb{K}^n$ ដូច្នេះដើម្បីសំរួលកំណត់សរសេរ យើងស្រាយបញ្ជាក់ចំពោះវ៉ិចទ័រនៃ $\mathbb{K}^n$ ។

1. ដំបូងយើងបង្ហាញល័ក្ខខ័ណ្ឌគ្រប់គ្រាន់។
   យក
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{13} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{matrix}} \\ \begin{matrix} a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,r} \end{matrix} \end{pmatrix}$$
   ដោយមិនប្រថុយចំលាស់ជួរដេក យើងអាចឧបមាថាមីន័រដែលបានគូសប្រអប់មិនសូន្យ។
   ដូច្នេះ យើងអោយអនុវត្តន៍
$$\begin{array}{cccc} p : & K^n & \to & \mathbb{K}^r \\ & \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} \end{array}$$
   ដូច្នេះ p ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរមួយ និង យើងបាន
$$||p(v_1), \cdots, p(v_r)|| = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

ដូច្នេះ $\det ||p(v_1), \cdots, p(v_r)|| \neq 0$ ។
តាមទ្រឹស្ដីបទ 4.10 យើងបាន ជាគោលមួយនៃ $(p(v_1), \cdots, p(v_r))$ ជាវ៉ិចទ័រមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ $\mathbb{K}^n$ ។ យើងទាញបាន $(v_1, \cdots, v_r)$ ជាវ៉ិចទ័រមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា ។
ដោយហេតុថា បើ $\lambda_1 v_1 +, \cdots + \lambda_r v_r = 0$ យើងបាន $\lambda_1 p(v_1) + \cdots + \lambda_r p(v_r) = 0$ ។ ដូច្នេះ $\lambda_1 = \cdots, \lambda_r = 0$ ។

2. ច្រាសមកវិញ ឧបមាថាគ្រួសារ $(v_1, \cdots, v_r)$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។ ដូច្នេះ យើងអាចបំពេញគ្រួសារនេះដោយ $n - r$ វ៉ិចទ័រនៃគោលកាណូនិចនៃ $\mathbb{K}^n$ ដើម្បីបង្កើតបានគោលមួយ។
ដោយមិនប្រថុយនឹងប្ដូសន្ទស្សន៍នៃគោលកាណូនិច យើងអាចឧបមាថា
$(v_1, \cdots, v_r, e_{r+1}, \cdots, e_n)$ ជាគោលមួយ។
យក

$$B = ||v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n|| = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{r1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{r+2,1} & \cdots & a_{r+2,r} & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

តាមទ្រឹស្ដីបទ 4.10 យើងបាន $\det B \neq 0$ ។ ដោយពន្លាតដេទែរមីណង់នៃម៉ាទ្រីស B តាមជួរឈរចុងក្រោយ រួចធ្វើដដែលៗ យើងបាន

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

ដូច្នេះគេអាចទាញពី A បានមីន័រមួយលំដាប់ r មិនសូន្យ។

ឧទាហរណ៍ 4.25. វ៉ិចទ័រ

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

បង្កើតបានគោលមួយនៃ $\mathbb{R}^5$ ព្រោះក្នុងម៉ាទ្រីស

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

គេទាញបានមីន័រដែលគូសក្នុងប្រអប់មិនសូន្យ។

4.8.3 ការបង្ហាញនៃវ៉ិចទ័រមួយស្ថិនៅក្នុងលំហវ៉ិចទ័របង្ករដោយវ៉ិចទ័រផ្សេងទៀត

និយមន័យ 4.6.

A ជាម៉ាទ្រីសមួយ និង δ ជាមីន័រលំដាប់ r ទាញចេញពី A ។ គេហៅថាប័រដង់នៃ δ គឺគ្រប់មីន័រលំដាប់ $r+1$ ទាញចេញពី A ដែល δ ជាដេទែរមីណង់ទាញចេញពីវា។

ឧទាហរណ៍ 4.26. គេមានម៉ាទ្រីស

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

យក $\delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ ។ ដូច្នេះប័រដង់នៃ δ មាន

គេមជាមួយជួរដេកទីបី $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

គេមជាមួយជួរដេកទីបួន $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\uparrow$ គេមជាមួយជួរឈរទីបី

$\uparrow$ គេមជាមួយជួរឈរទីបួន

$\uparrow$ គេមជាមួយជួរឈរទីប្រាំ

យើងឃើញយ៉ាងច្បាស់ថា បើ $A\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ និង δ ជាមីន័រមួយលំដាប់ r នោះមានប័រដង់ចំនួន $(p-r)(n-r)$ នៃ δ ក្នុង A ។

ទ្រឹស្ដីបទ 4.11. $(v_1,\cdots,v_r)$ ជាគ្រួសារនៃ r វ៉ិចទ័រមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា និង $A=||v_1,\cdots,v_r||$ ជាម៉ាទ្រីសដែលជួរឈររបស់វាជាកុំប៉ូសង់នៃវ៉ិចទ័រទាំងនេះក្នុងគោលណាមួយ ហើយ δ ជាមីន័រលំដាប់ r មិនសូន្យទាញចេញពី A ។ ដើម្បីអោយវ៉ិចទ័រ w មួយស្ថិតនៅក្នុងលំហ $[v_1,\cdots,v_r]$ ចាំបាច់ និង គ្រប់គ្រាន់អោយប័រដង់ទាំងអស់ក្នុងម៉ាទ្រីស $B=||v_1,\cdots,v_r,w||$ ស្មើសូន្យ។

សំរាយបញ្ជាក់
ដូចក្នុងសំរាយបញ្ជាក់នៃទ្រឹស្តីបទ 4.10 យើងសិក្សាក្នុងករណីនៃវ៉ិចទ័រនៃ $\mathbb{K}^n$ ។ យក

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,r} \end{pmatrix}$$

និង

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{13} & b_1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_r \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & b_{r+1} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,r} & b_n \end{pmatrix}$$

ដោយមិនប្រថុយនឹងប្តូរលំដាប់នៃជួរដេក និង ជួរឈរ យើងឧបមាថាមីន័រ δ មិនសូន្យ និង វាជាមីន័រគូសក្នុងប្រអប់។
បើ $w \in [v_1, \cdots, v_r]$ នោះគ្រប់ប័រដង់ទាំងអស់នៃ δ ស្មើនឹងសូន្យ។ ដោយហេតុថា បើមួយនៃប័រដង់មិនសូន្យ នោះតាមទ្រឹស្តីបទ 4.10 គ្រួសារ $\{v_1, \cdots, v_r, w\}$ ជាគ្រួសារសេរី។ លទ្ធផលនេះមិនពិត។
ច្រាស់មកវិញ ឧបមាថាគ្រប់ប័រដង់នៃ δ ស្មើនឹងសូន្យ។ ដោយពិនិត្យវ៉ិចទ័រជួរដេកនៃម៉ាទ្រីស B គេឃើញថា r វ៉ិចទ័រជួរដេកបំបូងមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា ព្រោះ $\delta \neq 0$ និងវ៉ិចទ័រនិមួយៗនៃវ៉ិទ័រផ្សេងទៀតជាវ៉ិចទ័រភ្ជាប់ជាមួយវ៉ិចទ័រ r វ៉ិចទ័របំបូង។ ដូច្នេះម៉ាទ្រីស B មានរ៉ង់ស្មើនឹង r ។ ដូច្នេះវ៉ិទ័រជួរឈរ $v_1, \cdots, v_r, w$ ទាំងអស់នៃ B បង្កើតបានគ្រួសារមួយមានរ៉ង់ r ។ ដោយសារតែ $v_1, \cdots, v_r$ ជាវ៉ិចទ័រសេរីនោះ $w \in [v_1, \cdots, v_r]$ ។

ឧទាហរណ៍ 4.27. តើចំពោះតំលៃ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ណាដែលវ៉ិចទ័រ $w = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ ស្ថិតនៅក្នុងលំហវ៉ិចទ័ររងបង្ករដោយវ៉ិចទ័រ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ និង $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

យើងមាន $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ និង $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}$ ។

ប័រដង់ទាំងអស់នៃ δ មាន

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-\alpha \text{ និង } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \beta - 2$$

ដូច្នេះ $w \in [v_1, v_2]$ លុះត្រាតែ $\alpha = 1$ និង $\beta = 2$ ។

4.8.4 **ការកំណត់រ៉ង់**

ទ្រឹស្តីបទ 4.12. $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ ។ រ៉ង់នៃម៉ាទ្រីស A ស្មើនឹង r លុះត្រាតែ គេអាចទាញពី A មីន័រ δ លំដាប់ r មិនសូន្យ និងប័រដង់ទាំងអស់នៃ δ ក្នុង A ស្មើនឹងសូន្យ។

សំរាយបញ្ជាក់

1. ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងលើគឺគ្រប់គ្រាន់។ ដោយហេតុថា យក

$$A = ||v_1, \cdots, v_n|| = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,r} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

និង $\delta \neq 0$ ជាមីន័រគូសក្នុងប្រអប់។
ដោយសារតែ $\delta \neq 0$ តាមទ្រឹស្តីបទ 4.10 វ៉ិចទ័រ $(v_1, \cdots, v_r)$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា។ ដោយសារតែគ្រប់ប័រដង់ទាំងអស់នៃ δ ស្មើនឹងសូន្យ តាមទ្រឹស្តីបទ 4.11 វ៉ិចទ័រ v_s និមួយៗ $(s \geq r+1)$ ស្ថិតនៅក្នុងលំហ $[v_1, \cdots, v_r]$ ។ ដូច្នេះវ៉ិចទ័រជួរឈរទាំងអស់បង្កបានលំហវ៉ិចទ័រមួយមានវិមាត្រ r ។ ជាវិបាក $\operatorname{Rg} A = r$ ។

2. ច្រាសមកវិញ ឧបមាថា $\operatorname{Rg} A = r$ ។ ដោយមិនប្រថុយនឹងប្តូរលំដាប់ យើងអាចឧបមាថា វ៉ិចទ័រជួរឈរ $(v_1, \cdots, v_r$ ជាគ្រួសាររសេរីមួយ។ តាមទ្រឹស្តីបទ 4.10 យើងអាចទាញពីម៉ាទ្រីសដែលបង្កើតដោយ r ជួរឈរដំបូងនៃ A បានមីន័រ δ មួយមិនសូន្យ។ ដោយមិនប្រថុយនឹងប្តូរលំដាប់នៃកូអរដោនេ យើងអាចឧបមាថា δ ជាមីន័របង្កើតដោយ r វ៉ិចទ័រជួរដេកដំបូង និង r វ៉ិចទ័រជួរឈរដំបូង។ ដោយសារតែ $\operatorname{Rg} A = r$ យើងបាន $v_s \in [v_1, \cdots, v_r]$ ចំពោះ $s \geq r+1$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ 4.11 យើងបានគ្រប់បរដ័រទាំងអស់នៃ δ ក្នុង A ស្មើនឹងសូន្យ។

ទ្រឹស្តីបទ 4.13. រ៉ង់នៃម៉ាទ្រីស A មួយស្មើនឹងលំដាប់បើអតិបរិមានៃមីន័រមិនសូន្យទាញចេញពី A មានន័យថា

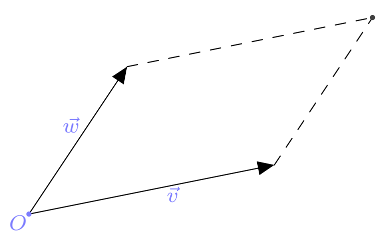
$$\operatorname{Rg} A = r \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{មានមីន័រមួយលំដាប់ } r \text{ មិនសូន្យ និង} \\ \text{គ្រប់មីន័រមួយលំដាប់ } s > r \text{ ស្មើនឹងសូន្យ} \end{cases} \tag{4.40}$$

សំរាយបញ្ជាក់

1. ឧបមាថា $\mathrm{Rg}\, A = r$ ។ បើសិនជាមានមីន័រមួយលំដាប់ $s > r$ មិនសូន្យ តាមទ្រឹស្តីបទ 4.10 គេអាចទាញជួរឈរពី A បានគ្រួសារសេរីមួយបង្កើតឡើងដោយ $s > r$ វ៉ិចទ័រ។ លទ្ធផលនេះមិនអាចមានទេ ព្រោះវ៉ិចទ័រនៃ A បង្ករបានលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រ r ។
2. ចំរាស់នៃទ្រឹស្តីបទនេះជាវិបាកមួយនៃទ្រឹស្តីបទខាងលើ។

4.9 បំណកស្រាយធរណីមាត្រនៃដេទែរមីណង់ - មាឌក្នុង $\mathbb{R}^n$

នៅក្នុងផ្នែកនេះ យើងអោយបំណកស្រាយនៃដេទែរមីណង់ជាក្រលាផ្ទៃនៃប្រលេឡូក្រាមក្នុង $\mathbb{R}^2$ និង ជាទូទៅជាមាឌនៃក្នុង $\mathbb{R}^n$ ។
យើងសិក្សាជាដំបូងក្នុងករណីលំហវ៉ិចទ័រវិមាត្រពីរ $\mathbb{R}^2$ ។ យើងអោយប្រលេឡូក្រាមបង្ករដោយវ៉ិចទ័រ v និង w ។



រូប 4.3:

ដោយចាត់ទុកវ៉ិចទ័រ v និង w ជាវ៉ិចទ័រជួរឈរ យើងអាចបង្កើតដេទែរមីណង់ $\det ||v, w||$ ។
ដោយសារតែ

$$\det ||v, w|| = -\det ||w, v||$$

ដូច្នេះ ដេទែរមីណង់អាចបកស្រាយដោយក្រលាផ្ទៃនៃប្រលេឡូក្រាម។ ដោយសារតែក្រលាផ្ទៃនេះជាចំនួនវិជ្ជមាន យើងបានសំណើខាងក្រោម។

សំណើ 4.4. ក្រលាផ្ទៃ $\mathcal{A}(v, w)$ នៃប្រលេឡូក្រាមបង្ករដោយវ៉ិចទ័រ v និង w ស្មើនឹងតំលៃដាច់ខាតនៃដេទែរមីណង់ $\det ||v, w||$ មានន័យថា

$$\mathcal{A}(v, w) = |\det ||v, w||| \tag{4.41}$$

សំរាយបញ្ជាក់
យក

$$\tilde{\mathcal{A}}(v, w) = \begin{cases} \mathcal{A}(v, w) & \text{បើ} \quad \det ||v, w|| \geq 0 \\ -\mathcal{A}(v, w) & \text{បើ} \quad \det ||v, w|| < 0 \end{cases}$$

$\tilde{\mathcal{A}}$ ហៅថាក្រលាផ្ទៃមានទិសដៅ។ ដើម្បីបង្ហាញទ្រឹស្តីបទនេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញបទគន្លឹះខាងក្រោម។

និយមន័យ 4.7. អនុវត្តន៍ $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ហៅថា

1. ទំរង់ទ្វេលីនេអ៊ែរបើ ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ និងចំពោះគ្រប់ $\lambda \in \mathbb{R}$
$$f(x+y, z) = f(x, z) + f(y, z) \tag{4.42}$$
$$f(x, y+z) = f(x, y) + f(x, z) \tag{4.43}$$
$$f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) = f(x, \lambda y) \tag{4.44}$$

2. និង លើសពីនេះហៅថាឆ្លាស់បើចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $x, y \in \mathbb{R}^2$
$$f(x, y) = -f(y, x) \tag{4.45}$$
រឺតាមសមមូល ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $x \in \mathbb{R}^2$
$$f(x, x) = 0 \tag{4.46}$$

បទគន្លឹះ 4.3. $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ជាទំរង់ទ្វេលីនេអ៊ែរឆ្លាស់ និង ដែល ចំពោះគ្រប់គោល (e_1, e_2) នៃ $\mathbb{R}^2$
$$f(e_1, e_2) = 1 \tag{4.47}$$
គេបានចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $x, y \in \mathbb{R}^2$
$$f(x, y) = \det ||x, y|| \tag{4.48}$$

សំរាយបញ្ជាក់

ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $x, y \in \mathbb{R}^2$ យើងអាចសរសេរ
$$\begin{aligned} x &= ae_1 + be_2 \\ y &= ce_1 + de_2 \end{aligned}$$
ដូច្នេះ យើងបាន
$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\ &= acf(e_1, e_1) + adf(e_1, e_2) + bcf(e_2, e_1) + bdf(e_2, e_2) \\ &= (ad - bc) f(e_1, e_2) \\ &= ad - bc \\ &= \det ||x, y|| \end{aligned}$$
ដូច្នេះ ដើម្បីបញ្ចប់សំរាយបញ្ជាក់នៃសំណើ 4.4 យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $\tilde{\mathcal{A}}$ ជាទំរង់លីនេអ៊ែរឆ្លាស់ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $\tilde{\mathcal{A}}(e_1, e_2) = 1$ ចំពោះគ្រប់គោល (e_1, e_2) នៃ $\mathbb{R}^2$ ។

យើងឃើញភ្លាមថា
$$\tilde{\mathcal{A}}(v, v) = \pm \mathcal{A}(v, v) = 0$$
និង
$$\tilde{\mathcal{A}}(e_1, e_2) = \frac{\det ||e_1, e_2||}{|\det ||e_1, e_2|||} \mathcal{A}(e_1, e_2) = \frac{1}{1} \times 1 = 1$$
យើងនៅតែបង្ហាញថា $\mathcal{A}$ ជាទំរង់ទ្វេលីនេអ៊ែរលើ $\mathbb{R}^2$ ។ ដើម្បីបកស្រាយវា យើងត្រូវការបទគន្លឹះខាងក្រោម។

បទគន្លឹះ 4.4. ចំពោះគ្រប់វិចទ័រ $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ និងចំពោះគ្រប់ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{A}(\lambda v, w) = |\lambda| \mathcal{A}(v, w) \tag{4.49}$$

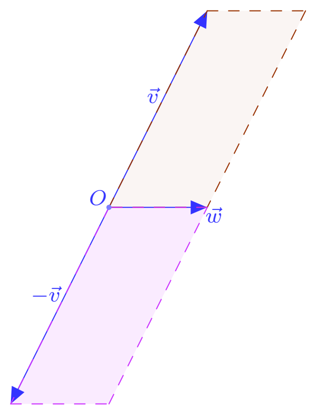
សំរាយបញ្ជាក់
តាមភាពសមមូល យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\mathcal{A}(-v, w) = \mathcal{A}(v, w) \tag{4.50}$$

និង

$$\mathcal{A}(cv, w) = c\mathcal{A}(v, w) \quad \forall c \in \mathbb{R}, c \geq 0 \tag{4.51}$$

បើ v និង w ជាវិទ័រអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា រឺ $c = 0$ នោះទំនាក់ទំនង (4.49) និង (4.51) ផ្ទៀងផ្ទាត់ ព្រោះក្រលាផ្ទៃនៃប្រលេឡូក្រាមបង្ករដោយវិចទ័រភ្ជាប់គ្នាស្មើនឹងសូន្យ។ ដូច្នេះ ឧបមាថា v និង w ជាវិទ័រមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា និង$c \neq 0$ ។ ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនង (4.49) ផ្ទៀងផ្ទាត់ ព្រោះប្រលេឡូក្រាមបង្ករដោយវិចទ័រ $-v$ និង w ជាបំលែងកិលនៃប្រលេឡូក្រាមបង្ករដោយវិចទ័រ v និង w ។

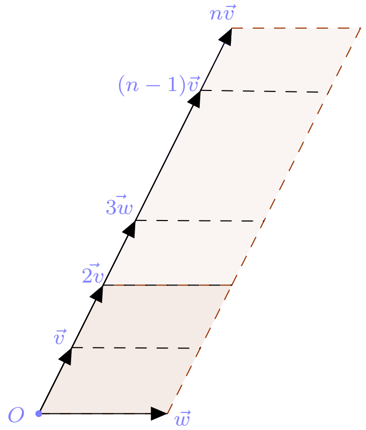


រូប 4.4:

យើងនឹងបង្ហាញទំនាក់ទំនាង (4.51) ។ ជាដំបូង យើងបាន

$$\mathcal{A}(nv, w) = n\mathcal{A}(v, w) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{4.52}$$

ព្រោះប្រលេឡូក្រាមកំណត់ដោយវិចទ័រ nv និង w ជាប្រជុំនៃ n ប្រលេឡូក្រាមដែលជាបំលែងកិលនៃប្រលេឡូក្រាមកំណត់ដោយ v និង w ។



រូប 4.5:

យើងទាញបានដោយជំនួស v ដោយ $\frac{1}{n}v$ ក្នុងរូបមន្ត (4.52) យើងបាន

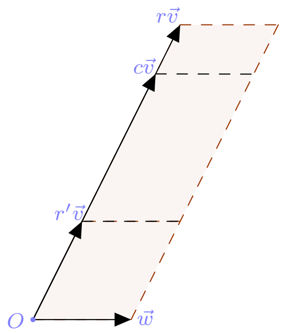
$$\mathcal{A}(\frac{1}{n}v, w) = \frac{1}{n}\mathcal{A}(v, w)$$

និង ដូច្នេះ

$$\mathcal{A}\left(\frac{m}{n}v, w\right) = \frac{m}{n}\mathcal{A}(v, w) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^* \tag{4.53}$$

ឥឡូវនេះ យក r និង r' ជាពីចំនួនសនិទានដែល $0 < r < c < r'$ យើងបាន

$$\mathcal{A}(rv, w) \leq \mathcal{A}(cv, w) \leq \mathcal{A}(r'v, w)$$



រូប 4.6:

ដូច្នេះ យើងបាន

$$r\mathcal{A}(v, w) \leq \mathcal{A}(cv, w) \leq r'\mathcal{A}(v, w) \tag{4.54}$$

ដោយធ្វើអោយ r និងr' ខិតជិត c ក្នុងសមីការ (4.54) យើងបាន

$$c\mathcal{A}(v,w) = \mathcal{A}(c,w)$$

ដូច្នេះសំណើនៃបទគន្លឹះ 4.4 ត្រូវបានបកស្រាយ។
យើងត្រឡប់មកបំណកស្រាយនៃសំណើ 4.4 ។
ពីបទគន្លឹះ 4.4 យើងទាញបាន

$$\tilde{A}(\lambda v,w) = \lambda\tilde{A}(v,w) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \tag{4.55}$$

ដោយហេតុថា បើ v និង w ជាវ៉ិចទ័រភ្ជាប់គ្នា រឺ $c=0$ សមីការ (4.55) ពិតជាផ្ទៀងផ្ទាត់។ ផ្សេងពីនេះ យើងបាន

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(\lambda v,w) &= \frac{\det||\lambda v,w||}{|\det||\lambda v,w|||}\mathcal{A}(\lambda v,w)\\
&= \frac{\lambda}{|\lambda|}\frac{\det||v,w||}{|\det||v,w|||}|\mathcal{A}(v,w)\\
&= \lambda\tilde{A}(v,w)
\end{aligned}$$

យើងនៅតែបង្ហាញថា

$$\mathcal{A}(v_1,+v_2,w) = \mathcal{A}(v_1,w)+\mathcal{A}(v_2,w) \quad \forall v_1,v_2,w\in\mathbb{R}^2 \tag{4.56}$$

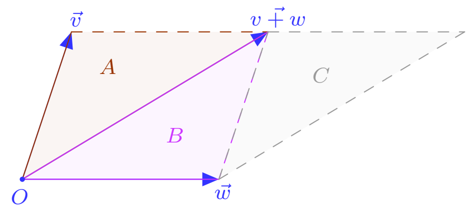
$$\mathcal{A}(v_1,+v_2,w) = \mathcal{A}(v_1,w)+\mathcal{A}(v_2,w) \quad \forall v_1,v_2,w\in\mathbb{R}^2$$

សំរាយបញ្ជាក់នឹងត្រូវធ្វើជាដំណាក់កាលខាងក្រោម។

1. $\mathcal{A}(v+w,w) = \mathcal{A}(v,w)$
   ដោយហេតុថា

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(v+w,w) &= \text{ក្រលាផ្ទៃនៃ } B + \text{ក្រលាផ្ទៃនៃ } C\\
\mathcal{A}(v,w) &= \text{ក្រលាផ្ទៃនៃ } A + \text{ក្រលាផ្ទៃនៃ } B
\end{aligned}$$

   និង ម្យ៉ាងវិញទៀត ក្រលាផ្ទៃនៃ $A =$ ក្រលាផ្ទៃនៃ B ព្រោះត្រីកោណ C ត្រូវបានបំលែងកិលនៃត្រីកោណ A ។



រូប 4.7:

2. $\tilde{A}(v+w,w)=\tilde{A}(v,w)$
ដោយហេតុថា បើ v និង w ជាវ៉ិចទ័រភ្ជាប់គ្នា ទំនាក់ទំនងខាងលើពិតជាផ្ទៀងផ្ទាត់។ បើវាជាវ៉ិចទ័រសេរី យើងបាន

$$\begin{aligned}\tilde{A}(v+w,w) &= \frac{|\det ||v+w,w|||}{\det ||v+w,w||}\mathcal{A}(v+w,w)\\ &= \frac{|\det ||v,w|||}{\det ||v,w||}\mathcal{A}(v,w)\\ &= \tilde{A}(v,w)\end{aligned}$$

3. $\tilde{A}(\lambda v+\mu w)=\lambda\tilde{A}(v,w) \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
ដោយហេតុថា

$\mu=0$ យើងទទួលបានទំនាក់ទំនងដែលបានបង្ហាញនៅខាងដើម។
ឧបមាថា $\mu\neq 0$ យើងបាន

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\lambda v+\mu w,w) &= \mathcal{A}\left(\lambda v+\mu w,\frac{\mu}{\mu}w\right)\\ &= \frac{1}{\mu}\tilde{A}(\lambda v+\mu w,\mu w)\\ &= \frac{1}{\mu}\tilde{A}(\lambda v,\mu w)\\ &= \tilde{A}\left(\lambda v,\tfrac{\mu}{\mu}w\right)\\ &= \tilde{A}(\lambda v,w)\end{aligned}$$

ឥឡូវនេះ យើងសរសេរ $v_1=av+bw$ និង $v_2=cv+dw$ យើងបាន

$$\begin{aligned}\tilde{A}(v_1+v_2,w) &= \tilde{A}((a+c)v+(b+d)w,w)\\ &= (a+c)\tilde{A}(v,w)\\ &= a\tilde{A}(v,w)+c\tilde{A}(v,w)\\ &= \tilde{A}(av,w)+\tilde{A}(cv,w)\\ &= \tilde{A}(v_1,w)+\tilde{A}(v_2,w)\end{aligned}$$

សារៈប្រយោជន៍នៃសំរាយបញ្ជាក់នេះ មាននៅក្នុងទង្វើដែលគេអាចទទូកម្មបានយ៉ាងងាយក្នុងលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រខ្ពស់។
យើងកំណត់យកប្រលេឡូក្រាមបង្ករដោយវ៉ិចទ័រ v_1 និង v_2 ជាសំណុំ

$$\{z\in\mathbb{R}^2,\ z=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2 \text{ ជាមួយនឹង } 0\leq\lambda_i\leq 1, i=1,2\} \tag{4.57}$$

យើងទូទៅកម្មទ្រឹស្តីបទខាងក្រោម។

ទ្រឹស្តីបទ 4.14. $v_1, \cdots, v_n$ ជា n វ៉ិចទ័រនៃ $\mathbb{R}^n$ ។ គេកំណត់យក $\mathcal{V}(v_1, \cdots, v_n)$ មាឌនៃប្រលេពីប៉ែតបង្ករដោយ $v_1, \cdots, v_n$ មានន័យថាជាសំណុំ

$$\{z \in \mathbb{R}^n,\, z = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ ជាមួយនឹង } 0 \le \lambda_i \le 1, i = 1, \cdots, n\} \tag{4.58}$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$\mathcal{V}(v_1, \cdots, v_n) = |\det ||v_1, \cdots, v_n||| \tag{4.59}$$

សំរាយបញ្ជាក់នៃទ្រឹស្តីបទនេះធ្វើឡើងដូចគ្នានឹងសំរាយបញ្ជាក់នៃសំណើ 4.4 ។ ដើម្បីបកស្រាយវា យើងគ្រាន់តែអោយសំណើខាងក្រោមដែលជាភាពទូទៅនៃបទគន្លឹះ 4.3 ។

សំណើ 4.5. $f \;:\; \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ ដង}} \;\to\; \mathbb{R}$ ជាទំរង់ពហុលីនេអ៊ែរ និង ឆ្លាស់ មានន័យថា ចំពោះគ្រប់ $v_1, \cdots, \cdots, v_n, w_1, \cdots, w_n \in \mathbb{R}^n$ និង ចំពោះគ្រប់ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(v_1, \cdots, \lambda v_i + \mu w_i, \cdots, v_n) = \lambda f(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_n) + \mu f(v_1, \cdots, w_i, \cdots, v_n) \tag{4.60}$$

$$\exists\, v_i = v_j,\; f(v_1, \cdots, v_i, \cdots, \cdot v_j, \cdots, v_n) = 0 \tag{4.61}$$

និង ដែល ចំពោះគ្រប់គោល (e_i) នៃ $\mathbb{R}^n$

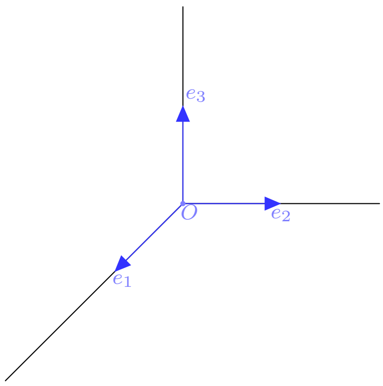
$$f(e_1, \cdots, e_n) = 1 \tag{4.62}$$

ដូច្នេះ គេបាន ចំពោះគ្រប់គោល $v_1, \cdots, v_n$ នៃ $\mathbb{R}^n$

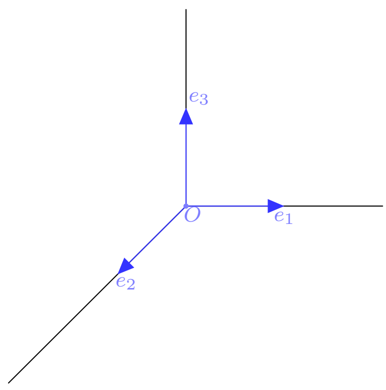
$$f(v_1, \cdots, v_n) = \det ||v_1, \cdots, v_n|| \tag{4.63}$$

4.10 ការកំណត់ទិសដៅនៃលំហ

យើងបានដឹងហើយនៅក្នុងធរណីមាត្រវិភាគ គេអាចអោតទិសដៅនៃលំហមួយ។ នៅពេលនេះយើងលើយកការអនុវត្តន៍នៃដេទែរមីណង់ទៅនឹងសណ្ណាណនៃការកំណតើទិសដៅនៃលំហ។
$B = (v_1, v_2, v_3)$ ជាគោលមួយមានលំដាប់នៃ $\mathbb{R}^3$ ។ ដូច្នេះ យើងបាន $\det ||v_1, v_2, v_3|| \neq 0$ ។គេថា B មានទិសដៅវិជ្ជមានបើ $\det ||v_1, v_2, v_3|| > 0$ និង ក្នុងករណីផ្ទុយ គេថា B មានទិសដៅអវិជ្ជមាន។



រូប 4.8: ការកំណត់ទិដៅវិជ្ជមាន



រូប 4.9: ការកំណត់ទិដៅអវិជ្ជមាន

យើងបានដឹងហើយថាសញ្ញាណនៃទិសដៅមានសរៈប្រយោជន៍ក្នុងរូបវិទ្យាដូចជាក្នុងអេឡិចត្រូម៉ាញេទិច និងនៅក្នុងចំណោទផ្សេងៗទៀតដែលមាននៅក្នុងបំលែងវិល។ ដូចដែលយើងបានឃើញហើយថាទិសដៅតំរូវអោយជ្រើសរើសលំដាប់នៃតំរុយគោលមួយ។
សញ្ញាណនៃទិសដៅធ្វើទូទៅកម្មទៅនឹលំហវ៉ិចទ័រមួយមានវិមាត្រ n លើកាយ $\mathbb{R}$ តាមបែបខាងក្រោម។
E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយមានវិមាត្រ n លើ$\mathbb{R}$ ហើយ (e_i) និង (e'_i) ជាគោលពីរនៃ E រួច $P = P_{e_i \to e'_i}$ ជាម៉ាទ្រីសប្តូរគោល។ យើងបានដឹងហើយថា $\det P \neq 0$ ។ ដូច្នេះ យើងអោយនិយមន័យខាងក្រោម។

និយមន័យ 4.8. គេថាគោល(e_i) និង (e'_i) នៃលំហវ៉ិចទ័រចំនួនពិតមានវិមាត្រកំណត់ មានទិសដៅដូចគ្នាបើ $\det P_{e_i \to e'_i} > 0$ និងក្នុងករណីផ្ទុយ គេថាវាមានទិសដៅផ្ទុយគ្នា។

ចំណាំ 4.5. និយមន័យនេះសមស្របជាមួយនឹងរបៀបសំរាប់បញ្ជាក់។ ដោយហេតុថា (e_i) មានទិសដៅដូច (e_i) ($\det P_{e_i \to e_i} = \det I = 1 > 0$) ។ បើ (e_i) មានទិសដៅដូច (e'_i) នោះ (e'_i) មានទិសដៅដូច (e_i) (បើ $\det P_{e_i \to e'_i} > 0$ នោះ $\det P_{e'_i \to e_i} = \frac{1}{\det P_{e_i \to e'_i}} > 0$) ។ ជាចុងក្រោយ បើ (e_i) មានទិសដៅដូច (e'_i) និង (e'_i) មានទិសដៅដូច (e''_i) នោះ (e_i) មានទិសដៅដូច (e''_i) ។

សំណើ 4.6. សំណុំ $\mathbb{B}$ នៃគ្រប់គោលទាំងអស់នៃ E ចែកជាពីរលំហរងមិនទទេដាច់គ្នា៖ $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2$ ។ គ្រប់គោលនៃ $\mathcal{B}_1$ រៀងគ្នា នៃ $\mathcal{B}_2$ មានទិសដៅកូចគ្នា។
$\mathcal{B}_1$ និង $\mathcal{B}_2$ ហៅថាថ្នាក់នៃទិសដៅ។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងយកគោល $\mathcal{B}$ មួយនៃ E និង គេយក

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{B}}^{+} &= \{\text{គោលនៃ } E \text{ មានទិសដៅដូច } \mathcal{B}\,\} \\ &= \{\mathcal{B}' \in \mathbb{B}, \det P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} > 0\} \\ C_{\mathcal{B}}^{-} &= \{\text{គោលនៃ } E \text{ មានទិសដៅផ្ទុយទៅនឹង } \mathcal{B}\,\} \\ &= \{\mathcal{B}' \in \mathbb{B}, \det P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} < 0\} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ យើងឃើញច្បាស់ថាគ្រប់គោលទាំងអស់នៃ E ស្ថិតនៅជួនកាលក្នុង $C_{\mathbb{B}}^{+}$ រឺ $C_{\mathcal{B}}^{-}$ និង វាអាចនៅក្នុងទាំងពីរ។ ដូច្នេះ នៃគ្រប់គោលទាំងអស់នៃ E ចែកជាពីរលំហរងមិនទទេដាច់គ្នា៖ $\mathbb{B}$ ជាប្រជុំដាច់គ្នានៃ $C_{\mathcal{B}}^{+}$

និង នៃ $C_{\mathcal{B}}^{-}$ ។
ឥឡូវនេះ បើយើងយក $\mathbb{B}'$ មួយទៀតនៃ E អោយនៅនឹង នោះ យើងឃើញភ្លាមថា

$$\begin{array}{rcll} C_{\mathcal{B}'}^{+} & = & C_{\mathcal{B}}^{+} & \text{បើ } \mathcal{B} \text{ និង } \mathcal{B}' \text{ មានទិសដៅដូចគ្នា} \\ C_{\mathcal{B}'}^{-} & = & C_{\mathcal{B}}^{-} & \text{បើ } \mathcal{B} \text{ និង } \mathcal{B}' \text{ មានទិសដៅផ្ទុយគ្នា} \end{array}$$

នេះបង្ហាញថាបំណែកដែលបានបង្កើតដោយផ្អែក $\mathcal{B}$ មិនអាស្រ័យនឹងការជ្រើសនៃ $\mathcal{B}$ ទេ។

និយមន័យ 4.9. E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយមានវិមាត្រកំណត់។
គេថាគេបានកំណត់នៅនឹងទិសដៅមួយនៃ E បើគេបានជ្រើសរើសថ្នាក់មួយនៃទិសដៅ។ ដូច្នេះគេថា គោលនៃថ្នាក់នេះមានទិសដៅវិជ្ជមាន និង គោលមានទិសដៅអវិជ្ជមាន។

និយាយម៉្យាងទៀត ដាក់ទិសដៅមួយអោយនៅនឹងមានន័យយ៉ាងងាយថាធ្វើថ្នាក់មួយអោយមានសញ្ញា "+" និង ធ្វើថ្នាក់មួយទៀតអោយមានសញ្ញា "-" ។
ជាការពិតណាស់បើគេធ្វើគោល $\mathcal{B}$ មួយនៃ E អោយនៅនឹង គោលនេះមានទិសដៅមួយ។ តាមនិយមន័យ គោល $\mathcal{B}'$ ទាំងអស់ដែលស្ថិតនៅថ្នាក់ើដូចគ្នានឹង $\mathcal{B}$ មានទិសដៅវិជ្ជមាន មានន័យថា $\det P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} > 0$ ។
ដោយសារតែលើ $\mathbb{R}^n$ មានគោលកាណូនិចមួយ។ ដូច្នេះ វាមានទិសដៅកាណូនិចមួយ មានន័យថា គោល $(v_1, \cdots, v_n)$ មានទិសដៅវិជ្ជមានលុះត្រាតែ $\det P_{e_i\to v_i} > 0$ មានន័យថា $\det ||v_1, \cdots, v_n|| > 0$ ដែលយើងទទួលបានចំពោះ $n = 3$ ។

លំហាត់

លំហាត់ 4.1. ចូរសរសេរចំលាស់ទាំងអស់នៃ S_4 ។

លំហាត់ 4.2. ក្នុង S_4 គេអោយ $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ និង $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ។

1. គណនា $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ រួច $(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3)^{-1}$ ។
2. គណនា $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}$ និង σ_3^{-1} ។
3. គណនា $\sigma_3^{-1} \circ \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1}$ រួចសន្និដ្ឋាន។

លំហាត់ 4.3. ក្នុង S_5 គេអោយ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ។ គណនាស្វ័យគុណនៃ σ ។

លំហាត់ 4.4. ក្នុង S_7 គេអោយ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ។ សរសេរ σ ជាផលគុណនៃចំលាស់ទ្វេធាតុ រួចទាញរកសញ្ញានៃ σ ។

លំហាត់ 4.5. σ_1 និង σ_2 ជាពីរធាតុនៃ S_n ។ បង្ហាញថា $(\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1} = \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1}$ ។

លំហាត់ 4.6. គណនាសញ្ញានៃចំលាស់នៃ S_5 ខាងក្រោម

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ និង } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

គណនា $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)\varepsilon(\sigma_3)$ ។

លំហាត់ 4.7. គណនាដេទែរមីណង់ខាងក្រោម៖

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$
2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$
3. $\Delta = \begin{vmatrix} i+1 & i+2 \\ i+2 & i+3 \end{vmatrix}$
4. $\Delta = \begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ c-di & a-bi \end{vmatrix}$
5. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}$
6. $\Delta = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$

7. $\Delta = \begin{vmatrix} \sin\alpha + \cos\beta & \cos\beta + \cos\alpha \\ \cos\beta - \cos\alpha & \sin\alpha - \sin\beta \end{vmatrix}$

8. $\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$

9. $\Delta = \begin{vmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{vmatrix}$

10. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{vmatrix}$

លំហាត់ 4.8. គណនាដេទែរមីណង់ខាងក្រោម៖

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

3. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

4. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 101 \\ 2 & 4 & 204 \\ 3 & 9 & 309 \end{vmatrix}$

5. $\Delta = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$

6. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 2i & 1 & 1-i \\ -i+1 & i & 1 \end{vmatrix}$

7. $\Delta = \begin{vmatrix} i & i+1 & i+2 \\ i+1 & i+2 & i+3 \\ i+2 & i+3 & i+4 \end{vmatrix}$

8. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & i & j \\ j & 1 & i \\ i & j & 1 \end{vmatrix}$
   ដែល $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

9. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{vmatrix}$
   ដែល $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

10. $\Delta=\begin{vmatrix}0 & 1 & -\sin\theta\\ -1 & 0 & \cos\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\end{vmatrix}$

11. $\Delta=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 1\\ \cos\beta & \sin\beta & 1\\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1\end{vmatrix}$

12. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & \cos a & \tan\frac{a}{2}\\ 1 & \cos b & \tan\frac{b}{2}\\ 1 & \cos c & \tan\frac{c}{2}\end{vmatrix}$

13. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & \cos c & \cos b\\ \cos c & 1 & \cos a\\ \cos b & \cos c & 1\end{vmatrix}$

14. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & \cos a & \cos 2a\\ 1 & \cos b & \cos 2b\\ 1 & \cos c & \cos 2c\end{vmatrix}$

15. $\Delta=\begin{vmatrix}\cos a\cos b & -\sin a & -\cos a\sin b\\ \sin a\cos b & \cos a & -\sin a\sin b\\ \sin b & 0 & \cos b\end{vmatrix}$

16. $\Delta=\begin{vmatrix}a-b & b-c & c-a\\ b-c & c-a & a-b\\ c-a & a-b & b-c\end{vmatrix}$

17. $\Delta=\begin{vmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}$

18. $\Delta=\begin{vmatrix}-a^2 & ab & ac\\ ab & -b^2 & bc\\ ac & bc & -c^2\end{vmatrix}$

19. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ x & x^2 & 1\\ x^2 & 1 & x\end{vmatrix}$

20. $\Delta=\begin{vmatrix}x+2 & 2x+3 & 3x+4\\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5\\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17\end{vmatrix}$

21. $\Delta=\begin{vmatrix}x & a & a\\ a & x & b\\ b & b & x\end{vmatrix}$

22. $\Delta=\begin{vmatrix}x+a & x & x\\ x & x+a & x\\ x & x & x+a\end{vmatrix}$

23. $\Delta = \begin{vmatrix} x^2 & x^2+1 & x^2+x+1 \\ x^2+x+1 & x^2+1 & x^2 \\ x^2 & x^2 & x^2 \end{vmatrix}$

24. $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

25. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

26. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

27. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix}$

28. $\Delta = \begin{vmatrix} a+1 & b+1 & c+1 \\ b+c & c+a & a+b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

29. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$

30. $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix}$

31. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

32. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2a & 2a^2 \\ 2 & b & b^2 \\ 4 & 2c & 2c^2 \end{vmatrix}$

33. $\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

34. $\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$

35. $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$

36. $\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

37. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x+y & x^2+y^2 \\ 1 & y+z & y^2+z^2 \\ 1 & z+x & z^2+x^2 \end{vmatrix}$

លំហាត់ 4.9. គណនាដេទែរមីណង់ខាងក្រោម៖

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

4. $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

5. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

6. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 159 \\ 2 & 6 & 0 & 260 \\ 3 & 7 & 1 & 371 \\ 4 & 8 & 2 & 482 \end{vmatrix}$

7. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

8. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 7 \end{vmatrix}$

9. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

10. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & i & 1-i & 1+i \\ i & 1 & i+1 & 1-i \\ 1-i & 1+i & 1 & i \\ 1+i & i & i-1 & 1 \end{vmatrix}$

11. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1+i & 1+2i & 1+3i \\ 1+i & i+2 & i+3 & i+4 \\ i+2 & i+3 & i+4 & i+5 \\ i+3 & i+4 & i+5 & i+6 \end{vmatrix}$

12. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

13. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 7 & 1627 \\ 2 & 7 & 3 & 8 & 2738 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 3849 \\ 4 & 9 & 5 & 1 & 4951 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 5162 \end{vmatrix}$

14. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

15. $\Delta = \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix}$

16. $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$

17. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x & b \\ 1 & a & b & x \\ 1 & b & a & x \\ 1 & x & x & a \end{vmatrix}$

18. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$

19. $\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & -z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{vmatrix}$

20. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & 2a & 2b \\ a^3 & b^3 & 3a^2 & 3b^2 \end{vmatrix}$

21. $\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

22. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & a & b & 0 \end{vmatrix}$

23. $\Delta = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$

24. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$

25. $\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

26. $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{vmatrix}$

27. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 & 1 \\ t & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

លំហាត់ 4.10. បង្ហាញថា

1. $\begin{vmatrix} (a+1)(a+2) & a+2 & 1 \\ (a+2)(a+3) & a+3 & 1 \\ (a+3)(a+4) & a+4 & 1 \end{vmatrix} = -2$

2. $\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \end{vmatrix} = 9b^2(a+b)$

3. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+A \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$

5. $\Delta = \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & b \\ b & b & x \end{vmatrix} = (x+a+b)(x-a)(x-b)$

6. $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = ab+bc+ca+abc$

លំហាត់ 4.11. ដោះស្រាយសមីការ

1. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} x+3 & x & x \\ x & x+3 & x \\ x & x & x+3 \end{vmatrix} = 0$

3. $\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & 3 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$

លំហាត់ 4.12. ឧបមាថា $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$ គណនាដេទែរមីណង់ខាងក្រោម៖

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

2. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c & c-2b & a \\ f & f-2e & d \\ i & i-2h & g \end{vmatrix}$

3. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & 2a-c \\ 2g & 2h & 4g-2i \\ d & e & 2d-f \end{vmatrix}$

លំហាត់ 4.13. ដោយមិនពន្លាតបង្ហាញថាដេទែរមីណង់ខាងក្រោមស្មើនឹងសូន្យ៖

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}$

2. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2020 \\ 2 & 3 & 2030 \\ 2 & 4 & 2400 \end{vmatrix}$

3. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} j & j^2 & -\frac{1}{2} \\ j^2 & j & -\frac{1}{2} \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

លំហាត់ 4.14. 1. ដោយដឹងថា $546, 273$ និង 169 ចែកដាច់នឹង 13 បង្ហាញថា $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ ចែកដាច់នឹង 13 ។

2. ដោយមិនគណនា បង្ហាញថាដេទែរមីណង់ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ ចែកដាច់នឹង 13 ។

3. ដោយដឹងថា $1700, 1020, 1122$ និង 1309 ចែកដាច់នឹង 17 បង្ហាញថាដេទែរមីណង់ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ ចែកដាច់នឹង 17 ។

4. ដោយមិនគណនា បង្ហាញថាដេទែរមីណង់ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 5 \\ 5 & 7 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ ចែកដាច់នឹង 17 ។

5. យើងដឹងថាចំនួន $18117, 16104, 14091, 12078, 10065$ ចែកដាច់នឹង 2013 បង្ហាញថាចំនួន $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ ចែកដាច់នឹង 2013 ។

លំហាត់ 4.15. Δ_n តាងដេទែរមីណង់ n ។ គណនា

1. $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \ddots & a_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$
   ដែល $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ ។

2. $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$
   ដែល $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ ។

3. $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ b & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$
   ដែល $a, b \in \mathbb{K}$ ។

5. $\Delta_n = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$
   ដែល $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, x \in \mathbb{K}$ ។

6. $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$

7. $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & & (0) \\ -x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -x \\ (0) & & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$
   ដែល $x \in \mathbb{K}$ ។

8. $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1+x & x & \cdots & x \\ x & a_2+x & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & a_n+x \end{vmatrix}$
ដែល $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, x \in \mathbb{K}$ ។

9. $\Delta_n = V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$
ដែល $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ ។

10. $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{vmatrix}$
ដែល $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ ។

11. $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}$
ដែល $a \in \mathbb{K}^*$ ។

12. $\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & 1 & a+b \end{vmatrix}$
ដែល $a, b \in \mathbb{K}^*$ ។

13. $\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & \cos\theta \end{vmatrix}$
ដែល $\theta \in \mathbb{R}$ ។

14. $\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$

15. $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$

16. $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-2 & n-3 & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

17. $\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n-x \end{vmatrix}$

ដែល $x \in \mathbb{K}$ ។

18. $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

ដែល $x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{K}$ ។

19. $\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix}$

ដែល $a_1, \cdots a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{K}$ ។

20. $\Delta_{p+1} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{p} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \binom{n+p}{2} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}$

21. $\Delta_m = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{m-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \cdots & \binom{n+1}{m-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n+m-1}{1} & \binom{n+m-1}{2} & \cdots & \binom{n+m-1}{m-1} \end{vmatrix}$

ដែល $n \geq m \geq 2$ ។

លំហាត់ 4.16. $a, b, c \in \mathbb{C}$ ។ គេអោយ $M = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$ និង $N = \left(j^{(i-1)(k-1)}\right)_{1\leq i\leq 3, 1\leq k\leq 3}$ ដែល j ជារឹសទីបីនៃឯកតា។ គេយក $p(x) = ax^2 + bx + c$ ជាពហុធាកុំផ្លិចមួយ។

1. គេកំណត់យក C_k ជាម៉ាទ្រីសជួរឈរទី k នៃ N ។ បង្ហាញថា $MC_k = p(j^{k-1})C_k)$ ។
2. កំណត់ $\det M$ ជាអនុគមន៍នៃ $p(1)$, $p(j)$ និង (j^2) ។
3. ទាញរកការបំបែកជាផលគុណមួយនៃ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ ។

លំហាត់ 4.17. គេយក Δ_n ដេទែរមីណង់លំដាប់ n កំណត់ដោយ

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1. គណនា Δ_1, Δ_2 និង Δ_3 ។
2. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ គេបាន $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$ ។
3. ទាញរក Δ_n ចំពោះ $n \geq 1$ ។

លំហាត់ 4.18. a ជាចំនួនពិត និង Δ_n ជាដេទែរមីណង់លំដាប់ n កំណត់ដោយ

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. គណនា Δ_n ជាអនុគមន៍នៃ Δ_{n-1} ។
2. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ គេបាន $\Delta_n = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n} i^2$ ។

លំហាត់ 4.19. a, b, c ជាចំនួនពិត និង Δ_n ជាដេទែរមីណង់លំដាប់ n កំណត់ដោយ

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & c & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

1. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ គេបាន $\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$ ។

2. គេយក $b^2 = ac$ ។ ង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ គេបាន $\Delta_n = a\dfrac{(n+1)a^n}{2^n}$ ។

លំហាត់ 4.20 (ដេទែរមីណង់ Vandermonde). $x0, x_1, \cdots, x_n$ ជា $n+1$ ចំនួនពិត។ បង្ហាញថា

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

លំហាត់ 4.21. គេអោយ $n+2$ ចំនួនពិត $x_1, \cdots, x_n, a, b$ ជាមួយនឹង $a \neq b$ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេយក

$$D(x) = \begin{vmatrix} x_1 + x & a + x & \cdots & a + x \\ b + x & x_2 + x & \ddots & a + x \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b + x & \cdots & b + x & x_n + x \end{vmatrix}$$

1. បង្ហាញថា $D(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេតូចជាងរឺស្មើនឹងមួយ។

2. ទាញរកតំលៃនៃដេទែរមីណង់

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \ddots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}$$

លំហាត់ 4.22. $a_1, \cdots, a_n$ ជា n ចំនួនកុំផ្លិច និង $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ ។ គេអោយម៉ាទ្រីស A និង M កំណត់ដោយ

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

និង

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

គណនា $\det(AM)$ និងទាញរក $\det(A)$ ។

លំហាត់ 4.23. 1. បង្ហាញថាដេទែរមីណង់ $\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} \\ a & 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & a^2 & 0 & \frac{1}{a} \\ a^3 & a^2 & a & 0 \end{vmatrix}$ និង $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ស្មើគ្នា រួចគណនាវា។

2. ចូរធ្វើទូទៅកម្មទៅនឹងដេទែរមីណង់លំដាប់ n ។

លំហាត់ 4.24. ចំពោះ $n \in \mathbb{N}^*$ គេយក D_n ជាដេទែរមីណង់លំដាប់ n កំណត់ដោយ

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ b & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$$

ដែល $a, b \in \mathbb{K}$ ។ បង្ហាញថា គេបាន

$$\forall n \geq 2,\ D_n = aD_{n-1} + \begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ b & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$$

ដែលតួចុងក្រោយជាដេទែរមីណង់លំដាប់ n ។
ទាញរកតំលៃនៃ D_n ។

លំហាត់ 4.25. គណនាដេទែរមីណង់ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ និងធ្វើទូទៅកម្មទៅនឹងដេទែរមីណង់លំដាប់ n ។

លំហាត់ 4.26. ដោយគណនាតាមពីររបៀបពីរផ្សេងគ្នាដេទែរមីណង់ $\begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 & t^4 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$ ទាញរកដេទែរមីណង់

$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$ និង $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$ ។

លំហាត់ 4.27. គេអោយចំនួនពិត t_1, t_2, t_3 និង t_4 ។ រកល័ក្ខខ័ណ្ឌដើម្បីអោយដេទែរមីណង់ $\begin{vmatrix} t_1 & t_1^2+3 & t_1^3 & t_1^4+1 \\ t_1 & t_1^2+3 & t_1^3 & t_1^4+1 \\ t_2 & t_2^2+3 & t_2^3 & t_2^4+1 \\ t_3 & t_3^2+3 & t_3^3 & t_3^4+1 \\ t_4 & t_4^2+3 & t_4^3 & t_4^4+1 \end{vmatrix}$ ស្មើនឹងសូន្យ?

លំហាត់ 4.28. n និង k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ គេយក

$$D(n,k) = \begin{vmatrix} 1^k & 2^k & \cdots & n^k \\ 2^k & 3^k & \cdots & (n+1)^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^k & (n+1)^k & \cdots & (2n-1)^k \end{vmatrix}$$

1. គណនា $D(n,1)$ ចំពោះ $n = 1, 2, 3$ ។
2. បង្ហាញថា $D(n,2) = 0$ ចំពោះ $n \geq 3$ ។
3. បង្ហាញថា $D(n,k) = 0$ ចំពោះ $n > k+1$ ។

លំហាត់ 4.29. គណនាតាមវាចារណ៍ដោយកំណើនដេទែរមីណង់លំដាប់ n

$$\begin{vmatrix} a & b & -b & b & \cdots & (-1)^{n+1}b \\ -b & a & -b & b & \cdots & (-1)^{n+2}b \\ b & -b & a & -b & \cdots & (-1)^{n+3}b \\ -b & b & -b & a & \ddots & (-1)^{n+4}b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}b & (-1)^{n+2}b & (-1)^{n+3}b & \cdots & -b & a \end{vmatrix}$$

ដែល $a, b \in \mathbb{K}$ ។

លំហាត់ 4.30. គណនាតាមវាចារណ៍ដោយកំណើនដេទែរមីណង់លំដាប់ n

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & \ddots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b_n & \cdots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

ដែល $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots b_n \in \mathbb{K}$ ។

លំហាត់ 4.31. គេយក $A(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & -z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix}$ និង គេយក $P = \det(A(x,y,z,t))$ ។

1. បង្ហាញថា $A(x,y,z,t) = (x^2+y^2+z^2+t^2)^2$ (គេអាចគណនាផលគុណនៃម៉ាទ្រីស $A(x,y,z,t)\,{}^tA(x,y,z,t)$)។
2. គេអោយពីរធាតុ (x,y,z,t) និង (x',y',z',t') នៃ $\mathbb{Z}^4$ ។ បង្ហាញថាមាន (x'',y'',z'',t'') ក្នុង $\mathbb{Z}^4$ ដែល $P(x,y,z,t)P(x',y',z',t') = P(x'',y'',z'',t'')$ ។
3. ទាញរកលក្ខណៈមួយនៃចំនួនគត់ផលគុណនៃផលបូកនៃការេបួន។

លំហាត់ 4.32. a, b, c និង m ជាចំនួនពិត។ គេអោយសមីការលីនេអ៊ែរ

$$AX = B \tag{4.64}$$

ដែល $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} m-5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & m-3 \\ 1 & m-4 & 3 \end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ។

1. បង្ហាញថា $\det(A) = 0$ លុះត្រាតែ $m = 0$ រឺ $m = 6$ ។
   បង្ហាញថា បើ m ផ្សេងពី 0 និង ពី 6 សមីការ (??) មានចំលើយតែមួយគត់។

2. ឧបមាថា $m = 0$ រឺ $m = 6$ ។ ក្នុងករណីនិមួយ រកល័ក្ខខ័ណ្ឌលើ a, b, c ដើម្បីអោយ (4.64) មានចំលើយ។ ដោះស្រាយសមីការនេះកាលណាល័ក្ខខ័ណ្ឌផ្ទៀងផ្ទាត់។

លំហាត់ 4.33. a ជាចំនួនពិតមួយ។ គេអោយសមីការលីនេអ៊ែរ

$$AX = B \tag{4.65}$$

ដែល $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 5 \\ 1 & -a & 3 \\ 9 & -7 & 8a \end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ។

1. គណនា $\det(A)$ ។ តើចំពោះតំលៃនៃ A ណា គេបាន $\det(A) = 0$ ។
2. គេជ្រើសរើស a ដែល $\det(A) \neq 0$ ។ បង្ហាញថា សមីការ (4.65) មានចំលើយតែមួយគត់ និងគណនាចំលើយរបស់វាជាអនុគមន៍នៃ a ។
3. គេជ្រើសរើស a ដែល $\det(A) = 0$ ។ ដូច្នេះបង្ហាញថា សមីការ (4.65) គ្មានចំលើយ។

លំហាត់ 4.34. គេអោយម៉ាទ្រីស $M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ និង f ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរដែលត្រូវគ្នា។

1. កំណត់តំលៃ λ ដើម្បីអោយ $f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}$ មិនមានចំរាស់។
2. ដូច្នេះ ចំពោះតំលៃទាំងនេះ ចូររកស្នូលនៃ $f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}$ ។
3. ទាញរកគោលថ្មីមួយដែលក្នុងគោលនេះ គេនឹងសរសេរម៉ាទ្រីសនៃ f ។

លំហាត់ 4.35. បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ខាងក្រោមជាអង់ដូរមរភីសនៃ $\mathbb{R}_2[x]$ និង គណនាដេទែរមីណង់របស់វា។

1. $\varphi : P \to Q$ ដែល $\forall x, \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$ ។
2. $\varphi : P \to Q$ ដែល $\forall x, \in \mathbb{R},\ Q(x) = (x^2-1)P'(x) - 2(x+3)P(x)$ ។
3. $\varphi : P \to Q$ ដែល $\forall x, \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(x) + xP'(x) + x^2P''(x)$ ។
4. $\varphi : P \to Q$ ដែល $\forall x, \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(x+1) - P(x)$ ។

លំហាត់ 4.36. បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ខាងក្រោមជាអង់ដូរមរភីសនៃ $\mathbb{R}_3[x]$ និង គណនាដេទែរមីណង់របស់វា។

1. $I : P \to Q$ ដែល $\forall x, \in \mathbb{R},\ Q(x) = xP'(x)$ ។
2. $\Delta : P \to Q$ ដែល $\forall x, \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(x+2) - 2P(x+1) + P(x)$ ។

លំហាត់ 4.37. 1. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ដែល $A^2 - A + I_n = 0$ ។ គណនា $|A|$ ។

2. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ដែល $A^2 - \sqrt{2}A + I_n = 0$ ។ គណនា $|A|$ ។

លំហាត់ 4.38. 1. គណនាក្រលាផ្ទៃនៃប្រលេឡូក្រាមសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ និង $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$។

2. គណនាមាឌនៃប្រលេឡូពីប៉ែតសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ និង $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ និង $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$។

3. បង្ហាញថាមាឌនៃនៃប្រលេឡូពីប៉ែតដែលកំពូលរបស់វាជាចំនុចនៃ $\mathbb{R}^3$ មានកូអរដោនេជាចំនួនគត់ ជាចំនួនគត់មួយ។

លំហាត់ 4.39. ចំពោះ $\alpha \in \mathbb{R}$ គេអោយម៉ាទ្រីស $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$។

កំណតើតំលៃនៃ α ដើម្បីអោយអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរដែលបង្កើតទៅនឹង M_α ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

លំហាត់ 4.40. សិក្សាតាមតំលៃនៃម៉ារ៉ាម៉ែរចំនួនពិត m ភាពមានចំរាសនៃម៉ាទ្រីស A ខាងក្រោម៖

1. $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ m+1 & m & 1 \\ m+2 & 1 & m \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 & -1 \\ -1 & m & -1 & 0 \\ 0 & -1 & m & -1 \\ -1 & 0 & -1 & m \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 2m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}$

លំហាត់ 4.41. ក្នុង $\mathbb{R}^3$ គេអោយគ្រួសារនៃវ៉ិចទ័រ (v_1, v_2, v_3) ជាមួយនឹង $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \end{pmatrix}$, $v_2 \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \end{pmatrix}$ និង $v_3 = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ។ តើចំពោះតំលៃ t ណាខ្លះ (v_1, v_2, v_3) ជាគ្រួសារសេរី។

លំហាត់ 4.42. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រួសារ (v_1, v_2, v_3) ខាងក្រោមជាគោលនៃ $\mathbb{R}^3$ រឺទេ?

1. $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,2,3)$ **និង** $v_3 = (1,2,3)$

2. $v_1 = (4,2,1)$, $v_2 = (2,6,-5)$ **និង** $v_3 = (1,-2,3)$

3. $v_1 = (1,,23)$, $v_2 = (2,,31)$ **និង** $v_3 = (3,1,2)$

4. $v_1 = (1,-2,3)$, $v_2 = (-3,2,1)$ **និង** $v_3 = (1,0,-2)$

លំហាត់ 4.43. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រួសារ (v_1, v_2, v_3) ខាងក្រោមជាគោលនៃ $\mathbb{C}^3$ រឺទេ ?

1. $v_1 = (1+i, 1+i, 1-i)$, $v_2 = (i, -i, -1-i)$ និង $v_3 = (1-i, 1-i, 1+i)$
2. $v_1 = (1+i, i, 1-i)$, $v_2 = (1+i, -i, 1-i)$ និង $v_3 = (1-i, -1-i, 1+i)$

លំហាត់ 4.44. គណនាដេទែរមីណង់លំដាប់ n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

ដែល $x \in \mathbb{K}$ ។

លំហាត់ 4.45. $D_n(t)$ ជាដេទែមីណង់លំដាប់ n មានមេគុណ $a_{ij}(t)$ ជាអនុគមន៍ចំនួនពិតមានដេរីវេនៃអថេរ $t \in \mathbb{R}$ ។ គេតាង $C_i(t)$ ចំពោះ $i = 1, \cdots, n$ វ៉ិចទ័រជួរឈរនៃ $D_n(t)$ ។

1. បង្ហាញថា
$$\frac{d}{dt}D_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \det \left|\left| C_1(t), \cdots, C_{k-1}(t), \frac{d}{dt}C_k(t), C_{k+1}(t), \cdots, C_n(t) \right|\right|$$
2. អនុវត្តន៍ ៖ បើ $D_n(t) = \begin{pmatrix} 1+t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+t \end{pmatrix}$
3. គណនា $\frac{d}{dt}D_n(t)$ រួច $D_n(t)$ ។
4. ប្រៀបធៀបលទ្ធផលជាមួយនឹងលំហាត់ 4.44 ។

លំហាត់ 4.46. $f_1, \cdots, f_n$ ជាអនុគមន៍ពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $f_1, \cdots, f_n$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នាលុះត្រាតែមានចំនួនពិ $x_1, \cdots, x_n$ ដែល

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

លំហាត់ 4.47. a, b និង c ជាបីចំនួនមិនសូន្យ ហើយ f ជាអង់ដូម័រភីសនៃ $\mathbb{R}^3$ ដែលម៉ាទ្រីសរបស់វាក្នុងគោលកាណុនិចជារី $A = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{a} & 1 & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{b} & 1 \\ 1 & 1 & 1+\frac{1}{c} \end{pmatrix}$ ។
បង្ហាញថា f ជាអូតូម័រភីសមួយនៃ $\mathbb{R}^3$ លុះត្រាតែ (a, b, c) មិនមែនជារឺសនៃសមីការងាយមួយដែលគេនឹងកំណត់។

លំហាត់ 4.48. គណនារ៉ង់នៃម៉ាទ្រីស M ខាងក្រោម៖

1. $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$

លំហាត់ 4.49. គណនារ៉ង់នៃម៉ាទ្រីស M ខាងក្រោម៖

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \cdots, A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ជំពូក 5

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

5.1 និយមន័យ និង បំណកស្រាយ

និយមន័យ 5.1. ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរមាន p សមីការ និង n អញ្ញាតុតិ $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ មានទំរង់

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \cdots & + & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right. \tag{5.1}$$

ដែល a_{ij} និង b_i ជាធាតុនៃ $\mathbb{K}$ ។

គេហៅថាចំលើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ (5.1) ជាវ៉ិចទ័រ $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ដែលកុំប៉ូសង់ x_i របស់វាផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់សមីការនៃប្រព័ន្ធ (5.1) ។ ប្រព័ន្ធហៅថាចុះសំរុងបើវាមានចំលើយមួយយ៉ាងតិច។

និយមន័យ 5.2 (ទំរង់ម៉ាទ្រីស). ឥឡូវ យើងយក $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ និង $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ប្រព័ន្ធ (5.1) អាចសរសេរក្រោមទំរង់ម៉ាទ្រីស

$$AX = B \tag{5.2}$$

និយមន័យ 5.3. គេហៅថារ៉ង់នៃប្រព័ន្ធ (5.1) ជារ៉ង់នៃម៉ាទ្រីស A ។

និយមន័យ 5.4 (បំណកស្រាយវ៉ិចទ័រ). ចំពោះ $i = 1, 2, \cdots, n$ យើងកំណត់យក $\vec{c_i} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{pi} \end{pmatrix}$ និង $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ ប្រព័ន្ធ (5.1) អាចសរសេរក្រោមទំរង់វ៉ិចទ័រ

$$x_1\vec{c_1} + x_2\vec{c_2} + \cdots + x_n\vec{c_n} = \vec{b} \tag{5.3}$$

ដូច្នេះ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (5.1) មានន័យថាកំណត់មេគុណ $x_1, \cdots, x_n$ នៃការបំបែកនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{b}$ លើ $\{\vec{c_1}, \cdots, \vec{c_n}\}$ ។

ដូច្នេះ យើងបានសំណើខាងក្រោម។

សំណើ 5.1. ប្រព័ន្ធសមីការ (5.1) លុះត្រាតែ វ៉ិចទ័រ $\vec{b}$ ស្ថិតនៅក្នុងលំហវ៉ិចទ័របង្កើតដោយ $\{\vec{c_1}, \cdots, \vec{c_n}\}$ ។

5.2 ប្រព័ន្ធសមីការក្រាម័រ

និយមន័យ 5.5. គេហៅថាប្រព័ន្ធក្រាម័រជាប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរមួយដែលម៉ាទ្រីសមេគុណរបស់វាជាម៉ាទ្រីសការេមានចំរាស់។
ដូច្នេះវាជាប្រព័ន្ធសមីការមាន n សមីការ និង n អញ្ញាតិទំរង់

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{5.4}$$

និង ទំរង់ម៉ាទ្រីស

$$AX = B \tag{5.5}$$

ដូច្នេះ យើងទាញបានសំណើខាងក្រោម។

សំណើ 5.2. ប្រព័ន្ធសមីការក្រាម័រ (5.4) ជានិច្ចកាលមានចំលើយមួយ និង តែមួយគត់។ វ៉ិចទ័រចំលើយ X នៃសមីការ (5.5) អោយដោយរូបមន្ត

$$X = A^{-1}B \tag{5.6}$$

ទ្រឹស្តីបទ 5.1 (ទ្រឹស្តីបទក្រាម័រ). គេកំណត់យក $\vec{c_i} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$, $i = 1, \cdots, n$ និង $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ។
ប្រព័ន្ធ (5.4) មានចំលើយមួយ និងតែមួយគត់ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{b}$ និងចំលើយរបស់វាអោយដោយរូបមន្តខាងក្រោម។

$$x_i = \frac{\det ||\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_{i-1}, \vec{b}, \vec{c}_{i+1}, \cdots, \vec{c}_n||}{\det A}, \quad i = 1, \cdots, n \tag{5.7}$$

សំរាយបញ្ជាក់
យើងសរសេរប្រព័ន្ធ (5.4) ជាទំរង់វ៉ិចទ័រ

$$x_1\vec{c_1} + x_2\vec{c_2} + \cdots + x_n\vec{c_n} = \vec{b}$$

យើងបាន

$$\begin{aligned} \det ||\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_{i-1}, \vec{b}, \vec{c}_{i+1}, \cdots, \vec{c_n}|| &= \det ||\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{c}_k, \vec{c}_{i+1}, \cdots, \vec{c}_n|| \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \det ||\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_{i-1}, \vec{c}_k, \vec{c}_{i+1}, \cdots, \vec{c}_n|| \end{aligned}$$

យើងសង្កេតឃើញថា ចំពោះ $k \neq i$ ដេទែរមីណង់នៃផលបូកនេះស្មើនឹងសូន្យ (ជួរឈរពីរស្មើគ្នា)។ ដូច្នេះវានៅសល់តែតួជាមួយ $k = i$ មានន័យថា $x_i \det A$ ។
ដូច្នេះ យើងបាន

$$\det ||\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_{i-1}, \vec{b}, \vec{c}_{i+1}, \cdots, \vec{c}_n|| = x_i \det A$$

ដោយសារតែ A មានចំរាស់ នោះ យើងបាន $\det(A) \neq 0$ និង យើងទាញបានរូបមន្ត (5.7) ។

ឧទាហរណ៍ 5.1. គេអោយប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} 2x & - & 5y & + & 2z & = & 7 \\ x & + & 2y & - & 4z & = & 3 \\ 3x & - & 4y & - & 6z & = & 5 \end{cases}$$

យើងបាន

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -46$$

ដូច្នេះវាជាប្រព័ន្ធក្រាម៉េរ។ ដោយប្រើរូបមន្តក្រាម៉េរ (5.7) យើងបាន

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 5 \\ y &= -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 1 \\ z &= -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

5.3 ករណីទូទៅ ទ្រឹស្តីបទរូសេ ហ្វុងតឺនេ

គេអោយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរនៃ p សមីការ និង n អញ្ញាត្តិ មានរ៉ង់ r ៖

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1r}x_r & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{r1}x_1 & + \cdots + & a_{rr}x_r & + \cdots + & a_{rn}x_n & = & b_r \\ \vdots & & & & & & \\ a_{p1}x_1 & + \cdots + & a_{pr}x_r & + \cdots + & a_{pn}x_n & = & b_p \end{cases} \tag{5.8}$$

យើងអាចឧបមាដោយមិនប្រថុយនឹងប្តូរលំដាប់នៃសមីការ និងសន្ទស្សន៍នៃអញ្ញាត្តិ ថាមីន័រដែលបានគូសក្នុងប្រអប់មិនសូន្យ។

ក្រោមទំរង់ម៉ាទ្រីស ជាមួយនឹងកំណត់សរសេរនៃ 5.1 ប្រព័ន្ធ (5.8) សរសេរ

$$x_1\vec{c}_1, \cdots, x_n\vec{c}_n = \vec{b}$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធសមីការចុះសំរុង លុះត្រាតែ $\vec{b} \in [\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_n]$ ។
ដោយសារតែ គ្រួសារនៃវ៉ិចទ័រ $\{\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_n\}$ មានរ៉ង់ r និង

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

ដូច្នេះ គ្រួសារនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_r\}$ ជាគ្រួសារសេរី រួច ជាគោលនៃ $[\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_n]$ ។
ដូច្នេះ $\vec{b} \in [\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_n] = [\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_r]$ លុះត្រាតែគ្រប់ប័រដង់នៃ δ ៖

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}x_r & b_r \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} & b_s \end{vmatrix} \quad s = r+1, \cdots, p$$

ស្មើនឹងសូន្យ។
ដេទែរមីណង់ Δ_s ហៅថាដេទែរមីណង់សំគាល់។ ដូច្នេះ ភាពសូន្យនៃ Δ_s ជាល័ក្ខខ័ណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធសមីការ (5.8) ចុះសំរុង។

ការរកចំលើយ

គេអោយប្រព័ន្ធសមីការ (5.8) ដែលក្នុងនោះគេឧបមាថាម៉ាទ្រីសដែលបានគូសក្នុងប្រអប់មានដេទែរមីណង់មិនសូន្យ និង គេឧបមាថាគេមានល័ក្ខខ័ណ្ឌនៃភាពចុះសំរុង។
គេអោយម៉ាទ្រីស

$$B = ||\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_r, \cdots, \vec{c}_n|| = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ \vdots & \cdots & & \vdots \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pr} & \cdots & a_{pn} & b_p \end{pmatrix}$$

ម៉ាទ្រីស B មានរ៉ង់ r ព្រោះ $\vec{c}_{r+1}, \cdots, \vec{c}_n, \vec{b} \in [\vec{c}_1 \cdots, \vec{c}_r]$ និង វ៉ិចទ័រ $\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_r$ បង្កើតបានជាប្រព័ន្ធសេរីមួយ។
ដូច្នេះជួរដេកនៃ B បង្កើតគ្រួសារមួយមានរ៉ង់ r ។ ដោយសារតែ r ជួរដេកជាវ៉ិចទ័រមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នានោះ ជួរដេកនិមួយៗនៃ $p-r$ ជួរដេកចុងក្រោយជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ r ជួរដេកដំបូង។ នេះមានន័យថាក្នុង

ប្រព័ន្ធ (5.8) សមីការនិមួយៗនៃ $p-r$ សមីការជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ r សមីការផ្សេងទៀត។ ដូច្នេះ $p-r$ សមីការទាំងនេះនឹងត្រូវបំបាត់ចោល។ ដូច្នេះប្រព័ន្ធ (5.8) សមមូលទៅនឹងប្រព័ន្ធ

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1r}x_r & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{r1}x_1 & +\cdots+ & a_{rr}x_r & +\cdots+ & a_{rn}x_n & = & b_r \end{array}\right. \tag{5.9}$$

សមីការនៃប្រព័ន្ធសមីការ (5.9) ហៅថាសមីការគោល។ អញ្ញាត្តិដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងប្រអប់ មានន័យថា $x_1,\cdots,x_r$ ហៅថាអញ្ញាត្តគោល និងអញ្ញាត្តិផ្សេងទៀតហៅថាអញ្ញាត្តសេរី។
ដើម្បីគណនាចំលើយ គេអោយទៅនឹងអញ្ញាត្តិសេរី $x_{r+1},\cdots,x_n$ តំលៃណាមួយនៃ $\mathbb{K}$ ៖

$$x_{r+1}=\lambda_{r+1},\ \cdots,x_n=\lambda_n \quad (\lambda_i\in\mathbb{K}) \tag{5.10}$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធ (5.9) សមមូលទៅនឹងប្រព័ន្ធ

$$\left\{\begin{array}{lclclclclcl} a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1r}x_r & = & b_1 & - & a_{1,r+1}\lambda_{r+1} & -\cdots- & a_{1,n}\lambda_n \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{r1}x_1 & +\cdots+ & a_{rr}x_r & = & b_r & - & a_{r,r+1}\lambda_{r+1} & -\cdots- & a_{1,n}\lambda_n \end{array}\right. \tag{5.11}$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធសមីការ (5.11) ជាប្រព័ន្ធក្រាម័រដែលមានចំលើយមួយ និងតែមួយគត់ចំពោះការជ្រើសរើសនៃប៉ារ៉ាម៉ែត $\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_n$ ។ ដូច្នេះ ចំលើយអាស្រ័យនឹង $n-r$ ស្កាលែរនៃ $\mathbb{K}$ ។ គេថាប្រព័ន្ធមានភាពមិនកំណត់លំដាប់ $n-r$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 5.2 (ទ្រឹស្តីបទរូសេ ហ្វុងតឺនេ). គេមាន

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1r}x_r & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{r1}x_1 & +\cdots+ & a_{rr}x_r & +\cdots+ & a_{rn}x_n & = & b_r \\ \vdots & & & & & & \\ a_{p1}x_1 & +\cdots+ & a_{pr}x_r & +\cdots+ & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right.$$

ប្រព័ន្ធនៃ p សមីការ និង n អញ្ញាត្តិ មានរ៉ង់ r ។
គេទាញមីន័រលំដាប់ δ មួយមិនសូន្យពីប្រព័ន្ធ។ ដោយមិនប្រថុយនឹងប្តូរសន្ទស្សន៍ គេឧបមាថា δ ជាមីន័រត្រូវបានគូសក្នុងប្រអប់៖

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0$$

1. ប្រព័ន្ធសមីការចុះសំរុង លុះត្រាតែ គ្រប់ដេទែរមីណង់សំគាល់ដែលបានបង្កើតទៅនឹង δ ៖

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a1r & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_r \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} & b_s \end{vmatrix} = 0 \quad s = r+1, \cdots, p$$

2. បើល័ក្ខខ័ណ្ឌនេះកើតឡើង ប្រព័ន្ធសមមូលទៅនឹងប្រព័ន្ធនៃសមីការចំបង

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1r}x_r & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{r1}x_1 & + \cdots + & a_{rr}x_r & + \cdots + & a_{rn}x_n & = & b_r \end{cases}$$

ដូច្នេះវាមានចំលើយមិនកំណត់មួយអាស្រ័យនឹង $n-r$ ប៉ារ៉ាម៉ែត។ ចំលើយទាំងអស់ត្រូវគណនាដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធក្រាម័រដែលបានទទួលដោយអោយទៅនឹងអថេរសេរី $x_{r+1}, \cdots, x_n$ តំលៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត។

ឧទាហរណ៍ 5.2. ពិភាក្សាទៅតាមតំលៃនៃ $k, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} 2x & + & y & - & z & = & \alpha \\ & & y & + & 3z & = & \beta \\ 2x & + & ky & + & 2z & = & \gamma \end{cases}$$

ជាដំបូង យើងសិក្សារ៉ង់នៃប្រព័ន្ធ។ ម៉ាទ្រីស A នៃប្រព័ន្ធកំណត់ដោយ៖

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix}$$

យើងបាន $\det A = 6(2-k)$ ។ បើ $k \neq 2$ នោះ $\operatorname{Rg} A = 3$ និង បើ $k = 2$ នោះ $\operatorname{Rg} A = 2$ ។ ដូច្នេះ ពីរករណីនឹងត្រូវបង្ហាញ។

1. $k \neq 2$
ប្រព័ន្ធសមីការជាប្រព័ន្ធក្រាម័រ។ ចំលើយនឹងត្រូវទទួលដោយរូបមន្តក្រាម័រ៖

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ \beta & 1 & 3 \\ \gamma & k & 2 \end{vmatrix}}{6(2-k)}, \; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ 0 & \beta & 3 \\ 2 & \gamma & 2 \end{vmatrix}}{6(2-k)}, \; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 2 & k & \gamma \end{vmatrix}}{6(2-k)}$$

ដោយធ្វើការគណនា យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned} x &= \frac{(2-3k)\alpha - (k+2)\beta + 4\gamma}{6(2-k)} \\ y &= \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2-k} \\ z &= \frac{-\alpha + (1-k)\beta + \gamma}{3(2-k)} \end{aligned}$$

2. $k=2$
ប្រព័ន្ធមានរ៉ង់ 2 ។ ដូច្នេះ យើងសិក្សាភាពចុះសំរុងដោយផ្អែកលើដេទែរមីណង់សំគាស់ ។ យើងទាញមីនរមួយលំដាប់ពីមិនសូន្យ ដូចជា $\delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ ។ ដេទែរមីណង់សំគាល់ដែលបានបង្កើតទៅនឹង δ មានតែមួយគត់ និង កំណត់ដោយ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 2 & 2 & \beta \end{vmatrix} = 2(\gamma - \alpha - \beta)$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធចុះសំរុង លុះត្រាតែ $\gamma = \alpha + \beta$ ។
ចំលើយនៃប្រព័ន្ធសមីការត្រូវទទួលដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការចំបង៖

$$\begin{cases} 2x + y - z = \alpha \\ \qquad\ \ y + 3z = \beta \end{cases}$$

អថេរសេរីជាអញ្ញាត្តិ z ។ ដូច្នេះ ដោយយក $z=\lambda$ ជាមួយនឹង $\lambda \in \mathbb{R}$ យើងបាន

$$x = \frac{\alpha - \beta + 4\lambda}{2},\ y = \beta - 3\lambda,\ z = \lambda$$

ជាសរុប

1. បើ $k \neq 2$ ប្រព័ន្ធមានចំលើយមួយ និង តែមួយគត់។
2. បើ $k = 2$ ពីរករណីនឹងត្រូវបង្ហាញ៖
   i បើ $\gamma \neq \alpha + \beta$ ប្រព័ន្ធគ្មានចំលើយ។
   ii បើ $\gamma = \alpha + \beta$ ប្រព័ន្ធមានចំលើយរាប់មិនអស់មួយអាស្រ័យនឹងប៉ារ៉ាម៉ែតមួយ។

5.4 ករណីនៃប្រព័ន្ធអូម៉ូហ្សែន

កាលណា $b_i = 0$ ចំពោះ $i = 1, \cdots, p$ ប្រព័ន្ធសមីការ (5.1) ហៅថាអូម៉ូហ្សែន។ និយាយអោយច្បាស់ យើងអាចអោយនិយមន័យខាងក្រោម។

និយមន័យ 5.6. ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែននៃ p សមីការ និង n អញ្ញាត្តិ $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ មានទំរង់

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

ដែល a_{ij} និង b_i ជាធាតុនៃ $\mathbb{K}$ ។
រឺជាទំរង់ម៉ាទ្រីស

$$AX = 0 \tag{5.13}$$

ដែល A និង X ត្រូវបានកំណត់ដូចនៅក្នុងនិយមន័យ 5.2 និង $0 \in \mathbb{K}^n$ ។

យើងឃើញថាប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូហ្សែនជានិច្ចកាលចុះសំរុង។ វាមានយ៉ាងតិចចំលើយសូន្យ។ នៅក្នុងចំណោទជាច្រើន វាមានអត្ថប្រយោជន៍ណាស់ដើម្បីស្គាល់ចំលើយមិនសូន្យ។
យើងក៏កត់សំគាល់ជាដំបូងផងដែរ សំណុំនៃចំលើយនៃប្រព័ន្ធអូម៉ូហ្សែនបង្កើតបានជាលំហរ៉ិចទ័រមួយ។ យើងឃើញយ៉ាងងាយដោយអោយអនុវត្តន៍

$$f \ : \ \mathbb{K}^n \ \to \ \mathbb{K}^p$$

ដែលម៉ាទ្រីសរបស់វាក្នុងគោលកាណូនិចជាម៉ាទ្រីស A ។
ដូច្នេះប្រព័ន្ធសរសេរ

$$f(x) = 0$$

និងសំណុំចំលើយមិនមែនផ្សេងពីស្នូល $\ker f$ នៃ f ដែលជាលំហរ៉ិចទ័រមួយ។ ដូច្នេះ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទនៃវិមាត្រ យើងបាន

$$n = \dim(\ker f) + \operatorname{Rg} f$$

ដូច្នេះ លំហនៃចំលយជាលំហមានវិមាត្រ $n-r$ ដែល r ជារ៉ាង់នៃប្រព័ន្ធ។
ដូច្នេះ យើងបានសំណើខាងក្រោម

សំណើ 5.3. ប្រព័ន្ធអូម៉ូហ្សែន

$$\left\{\begin{array}{llllllll} \boxed{a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1r}x_r} & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{r1}x_1 & +\cdots+ & a_{rr}x_r & +\cdots+ & a_{rn}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{p1}x_1 & +\cdots+ & a_{pr}x_r & +\cdots+ & a_{pn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

នៃ p សមីការ និង n អញ្ញាតុតិ មានរ៉ង់ r ។ គេឧបមាថាមីន័រដែលបានគូសក្នុងប្រអប់មិនសូន្យ។
ដោយសារតែល័ក្ខខ័ណ្ឌនៃភាពចុះសំរុងផ្ទៀងផ្ទាត់យ៉ាងងាយ ប្រព័ន្ធសមមូលទៅនឹងប្រព័ន្ធចំបង

$$\left\{\begin{array}{lllllll} a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1r}x_r & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{r1}x_1 & +\cdots+ & a_{rr}x_r & +\cdots+ & a_{rn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

សំណុំចំលើយបង្កើតបាលលំហរ៉ិចទ័រមានវិមាត្រ $n-r$ (គេថាយ៉ាងខ្លី r សមីការមិនទាក់ទងគ្នាកំណត់បានកើលំហរ៉ិចទ័ររងមួយមានវិមាត្រ $n-r$) ។

ចំណាំ 5.1. ចំលើយនៃប្រព័ន្ធសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន $AX = B$ ជាមួយនឹង $B \neq 0$ មិនបង្កើតបានជាលំហរ៉ិចទ័ររងតែ។ ដោយហេតុថា បើ X_1 និង X_2 ជាចំលើយពីរ គេបាន $AX_1 = B$ និង $AX_2 = B$ ។ ដូច្នេះ $A(X_1 + X_2) = 2B \neq B$ ។ នេះ មានន័យថាផលបូកនៃចំលើយនៃសមីការមិនអូម៉ូហ្សែនមិនមែនជាចំលើយរបស់វា។

ចំណាំ 5.2. តាមសំណើខាងលើ ប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូហ្សែនមានចំលើយមួយមិនសូន្យ លុះត្រាតែ $n > r$ ។ ក្នុងករណីនេះ ប្រព័ន្ធមានអញ្ញាតិច្រើនជាងសមីការ។
ករណីពិសេសមួយជាករណី A ជាម៉ាទ្រីសការេ។ ក្នុងករណីនេះ លក្ខខ័ណ្ឌដើម្បីអោយប្រព័ន្ធមានចំលើយមិនសូន្យសមមូលទៅនឹង $\det A \neq 0$ ។

ដូច្នេះ គេបានសំណើខាងក្រោម។

សំណើ 5.4.

គេមាន

$$AX = 0 \tag{5.14}$$

ជាប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែនមួយដែល A ជាម៉ាទ្រីសការេ។ ដូច្នេះ ប្រព័ន្ធមានចំលើយមិនសូន្យ លុះត្រាតែ $\det A = 0$ ។

ជំពូក 6

ការបង្រួមនៃអង់ដូម័រភីស

6.1 ទីតាំងនៃចំណោទ

E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយលើកាយ $\mathbb{K}$ និង f ជាអង់ដូម័រភីសមួយនៃ E ។ បើ E មានវិមាត្រកំណត់ និង $\{e_i\}$ ជាគោលមួយនៃ E គេអាចសង់ម៉ាទ្រីសដែលតំណាង f ក្នុងគោលនេះ៖

$$M(f)_{e_i} = ||f(e_1), \cdots, f(e_n)||_{e_i}$$

ដូចយើងបានឃើញហើយ បើគេប្តូរគោល ជាទូទៅម៉ាទ្រីសក៏ប្តូរដែរ មានន័យថា បើ $A = M(f)_{e_i}$, $A' = M(f)_{e'_i}$ និង $P = P_{e_i \to e'_i}$ ជាម៉ាទ្រីសប្តូគោលពីគោល $\{e_i\}$ ទៅគោល $\{e'_i\}$ គេបាន

$$A' = P^{-1}AP$$

នៅក្នុងជំពូកនេះ យើងស្នើរកគោលនៃ E ដែលក្នុងគោលនោះទំរង់នៃម៉ាទ្រីសមានលក្ខណៈងាយស្រួលដែលអាចធ្វើទៅបាន មានន័យថា ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង រឺម៉ាទ្រីសត្រីកោណ។

និយមន័យ 6.1. គេថា f ជាអង្កត់ទ្រូងកម្ម បើមានគោល $\{e_i\}$ មួយដែល

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

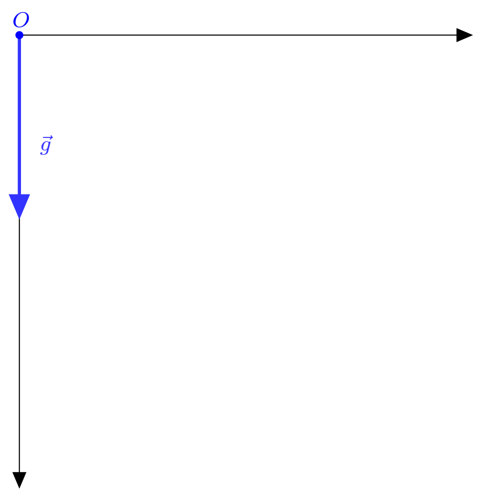
គេថា f ជាអង់ដូរម័រភីសត្រីកោណកម្ម បើមានគោល $\{e_i\}$ មួយដែល

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

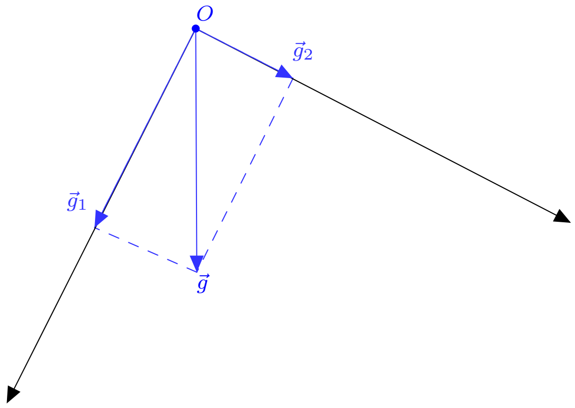
រឺ

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

ចំណោទនេះដូចគ្នាបេះបិតទៅនឹងចំណោទដែលដាក់នៅក្នុមេកានិច រឺរូបវិទ្យា។ ជាឧទាហរណ៏ កាលណាគេសាកល្បងកំណត់តំរុយដែលក្នុងនោះចំណោទមានទំរង់ងាយ។ ជាឧទាហរណ៍ បើគេសិក្សាទំលាក់សេរីនៃអង្គធាតុមួយ ជាធម្មជាតិ គេយកតំរុយមួយដែលអ័ក្សមួយនៃអ័ក្សរបស់វាជាអ័ក្សឈរដើម្បីអោយវ៉ិចទ័រសន្ទុះមានកុំប៉ូសង់មួយមិនសូន្យ។ តាមន័យផ្ទុយ បើគេយកអ័ក្សទ្រេតដែលទៅតាមអ័ក្សនេះ គេចាំបាច់បំបែកវ៉ិចទ័រសន្ទុះ។



រូប 6.1: ការកំណត់ទិដៅអវិជ្ជមាន



□□□ 6.2: ការកំណត់ទិដៅអវិជ្ជមាន

ចំពោះអង់ដូម័រភីស វាជាប្រភេទដូចគ្នានៃចំណោទ មានន័យថាគឺកំណត់គោលដែលក្នុងគោលនោះម៉ាទ្រីស នៃមានលេខសូន្យច្រើនដែលអាចធ្វើបាន។
ចំណោទដែលរវល់ដល់យើងមានពីរ៖

1. កំណត់អង់ដូម័រភីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម រឺ ត្រីកោណកម្ម។
2. កំណត់គោលបើមាន ដែលក្នុងគោលនោះម៉ាទ្រីសតំណាងរបស់វាជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង (រឺ ត្រីកោណ) ។

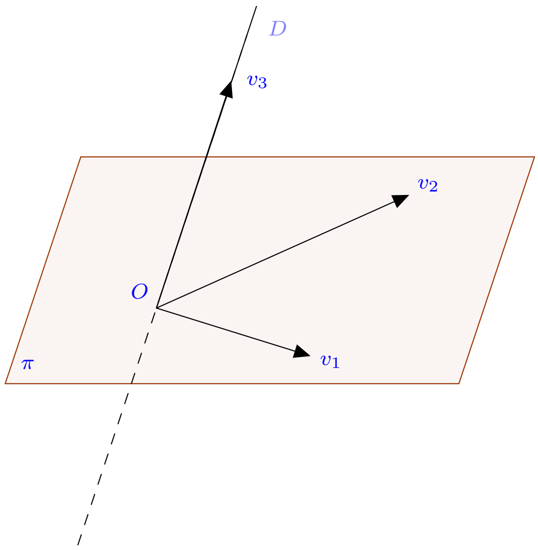
ជាម៉ាទ្រីស ដោយសារតែពីរម៉ាទ្រីស A និង A' ត្រូវភ្ជាប់គ្នាដោយទំនាក់ទំនង $A' = P^{-1}AP$ តំណាងអង់ដូម័រភីសតែមួយក្នុងគោលផ្សេងគ្នា ចំណោទត្រូវបានចែងយ៉ាងដូច្នេះ៖

1. កំណត់ម៉ាទ្រីស $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ដែលចំពោះម៉ាទ្រីសនេះ មាន $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ មានចំរាស់ ដែលម៉ាទ្រីស $A' = P^{-1}AP$ ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង (រឺ ត្រីកោណ រៀងគ្នា)។
2. កំណត់ម៉ាទ្រីស P និង A' ។

ក្នុងករណីខ្លះ ចំណោទអាចត្រូវដោះស្រាយយ៉ាងយាងតាមធរណីមាត្រ។ ដូចជាឧទាហរណ៍ f ជាចំណោល នៃ $\mathbb{R}3$ លើប្លង់ π សមីការ $x + 2y + 3z = 0$ ស្របនឹងបន្ទាត់ D សមីការ $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z$ ។
ក្នុងគោលកាណូនិច $\{e_i\}$ យើងបាន

$$M(f)_{e_i} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

ផ្ទុយទៅវិញក្នុងគោល $\{v_1, v_2, v_3\}$ ដែល $\{v_1, v_2\}$ ជាគោលនៃ π និង v_3 ជាគោលនៃ D យើងបាន $f(v_1) = v_1,\ f(v_2) = v_2,\ f(v_3) = 0$ ។



ដូច្នេះ យើងបាន

$$M(f)_{v_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f ជាអង់ដូម័រភីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម។ ដូចគ្នាដែរ បើគេយក g ជាបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងប្លង់ π ស្របនឹងបន្ទាត់ D គេបាន

$$M(g)_{v_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ផ្ទុយទៅវិញ ជាការពិតណាស់ គេមិនអាចសង្ឃឹមជានិច្ចកាលដោះស្រាយចំណោទតាមទរណីមាត្របានទេ។ នៅវគ្គបន្ត យើងនឹងអោយទ្រឹស្តី និងវិធីសាស្ត្រនៃការគណនាដែលអាចកំណត់ចំលើយយ៉ាងងាយនៃចំណោទ។ នៅក្នុងជំពូកនេះទាំងអស់ យើងឧបមាថា E ជាលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់លើកាយ $\mathbb{K}$ ។ និយមន័យខ្លះនៅតែមានតំលៃចំពោះលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រមិនកំណត់។

6.2 វ៉ិចទ័រផ្ទាល់

គន្លឹះនៃអង្កត់ទ្រូងកម្មជាសញ្ញាណនៃវ៉ិចទ័រផ្ទាស់ដែលនិយមន័យរបស់វានៅតែមានតែមានតំលៃចំពោះលំហមានវិមាត្រមិនកំណត់។

និយមន័យ 6.2. $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ ។ វ៉ិចទ័រ $v \in E$ ហៅថាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ f បើ

1. $v \neq 0$
2. $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ f(v) = \lambda v$ ។

ស្កាលែរ λ ហៅថាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ត្រូវគ្នានឹង v ។

ចំណាំ 6.1. 1. តាមនិយមន័យ 6.2 វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ និង តំលៃផ្ទាល់អាចសូន្យ *i.e.* វ៉ិចទ័រនៃ $\mathrm{Ker}\, f$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ត្រូវគ្នានឹង $\lambda = 0$ ។

2. បើ v ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ត្រូវគ្នានឹងតំលៃផ្ទាល់ λ នោះចំពោះគ្រប់ $\mu \in \mathbb{K}, \mu \neq 0$ វ៉ិចទ័រ μv ក៏ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ត្រូវគ្នានឹងតំលៃផ្ទាល់ λ ដូចគ្នា។
ដោយហេតុថា៖

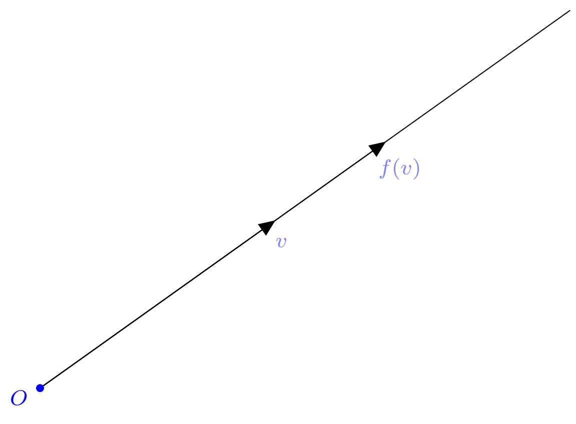
$$f(\mu v) = \mu f(v) = \mu(\lambda v) = \lambda(\mu v)$$

ដូច្នេះ វ៉ិចទ័រផ្ទាល់

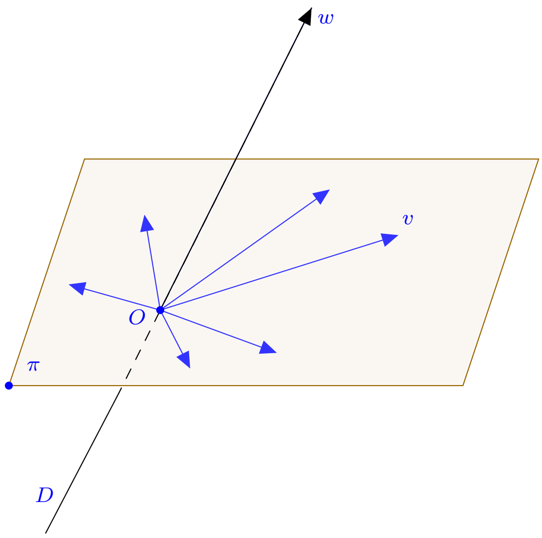
- ជួនកាល ជាវ៉ិចទ័រនៃស្នូល

- ជួនកាល ជាវ៉ិចទ័រដែលមិនប្តូរទិសក្រោមអំពើនៃ f ។

ដោយផ្អែកលើចំណាំ 6.1 បន្ទាត់វ៉ិចទ័រ D បង្ករដោយវ៉ិចទ័រផ្ទាល់មិនប្រែប្រួលដោយ f *i.e.* $f(D) \subset D$ ។



ឧទាហរណ៍ 6.1. យក $E = \mathbb{R}^3$ និង f ជាចំណោលលើប្លង់ π ស្របនឹងបន្ទាត់ D មួយ។



ចំពោះគ្រប់វិចទ័រ $v \in \pi$ យើងបាន $f(v) = v$ និងចំពោះគ្រប់វិចទ័រប្រាប់ទិស $w \in D$ គេបាន $f(w) = 0$ ។
ដូច្នេះគ្រប់វិចទ័រមិនសូន្យនៃប្លង់ជាវិចទ័រផ្ទាល់ត្រូវគ្នានឹងតំលៃផ្ទាល់ 1 រួច គ្រប់វិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ D ជាវិចទ័រផ្ទាល់ត្រូវគ្នានឹងតំលៃផ្ទាល់ 0 ។
ត្រង់នេះ ជាវិចទ័រផ្ទាល់ និងដូច្នេះជាតំលៃផ្ទាស់តែប៉ុណ្ណោះព្រោះគ្រប់វិចទ័រផ្សេងទៀតប្ដូរទិសក្រោមអពើនៃ f ។

ឧទាហរណ៍ 6.2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ជាបំលែងវិលមុំ θ ផ្ចិត O ។
ជាការពិតណាស់ បើ $\theta = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) នោះវិចទ័រ v និង $f(v)$ កូលីនេអ៊ែរគ្នា។ ដូច្នេះ f មានវិចទ័រផ្ទាល់ v ត្រូវគ្នានឹង $\lambda = \pm 1$ ($\lambda = -1$ បើ $\theta = \pi + 2\pi k$ និង $\lambda = 1$ បើ $\theta = 2\pi k$) ។
ក្នុងករណីដែល $\theta \neq \pi k$ នោះ f គ្មានវិចទ័រផ្ទាល់។

ឧទាហរណ៍ 6.3. យក $k \in \mathbb{K}$ និង $\begin{array}{rccc} h_{\mathbb{K}}: & E & \to & E \\ & x & \mapsto & kx \end{array}$ ជាបំលែងចាំងផលធៀប k ។
តាមនិយមន័យនេះ យើងឃើញថាគ្រប់វិចទ័រនៃ E ជាវិចទ័រផ្ទាល់ត្រូវនឹងតំលៃផ្ទាល់ k ។

សារៈប្រយោជនៃវិចទ័រផ្ទាល់មាននៅក្នុងទ្រឹស្ដីបទខាងក្រោម។

ទ្រឹស្ដីបទ 6.1. $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ ជាអង្កត់ទ្រូងកម្ម លុះត្រាតែ មានគោលមួយនៃ E បង្កើតឡើងដោយវិចទ័រផ្ទាល់។

សំរាយបញ្ជាក់
បើ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ គោលមួយនៃ E បង្កើតឡើងដោយវិចទ័រផ្ទាល់ត្រូវគ្នានឹងតំលៃផ្ទាល់ $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ គេបាន

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1, \; f(v_2) = \lambda_2 v_2, \; \cdots, \; f(v_n) = \lambda_n v_n \tag{6.4}$$

យើងបាន

$$M(f)_{v_i} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

និង ដូច្នេះ f ជាអង់ដូម័រភីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម។
ច្រាស់មកវិញ បើមានគោល $\{e_i\}$ ដែល $M(f)_{e_i}$ ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង៖

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

យើងបាន

$$f(e_1) = a_{11}e_i,\ f(e_2) = a_{22}e_2,\ \cdots,\ f(e_n) = a_{nn}e_n$$

នេះមានន័យថាវ៉ិចទ័រ e_i ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់។
ដូច្នេះ យើងឃើញថាអង់ដូម័រភីសនៃឧទាហរណ៍ 6.1 និង6.2 អង្កត់ទ្រូងកម្ម ព្រោះក្នុងករណីនេះ គេអាចសង់គោលមួយបង្កើតឡើងដោយវ៉ិចទ័រផ្ទាល់។
យើងសង្កេតឃើញថា នៅលើអង្គ់ទ្រូងចំបងនៃម៉ាទ្រីស លេចឡើងតែតំលៃផ្ទាល់នៃអង់ដូម័រភីស។

6.3 ការរកនៃតំលៃផ្ទាល់ ពហុធាសំគាល់

λ ជាតំលៃផ្ទាល់នៃអង់ដូម័រភីស f នៃ E ។ ដូច្នេះ មានវ៉ិចទ័រ $v \in E$ ជាមួយនឹង $v \neq 0$ ដែល $f(v) = \lambda v$ *i.e.* $(f - \lambda id)v = 0$ ។ ដោយសារតែ $v \neq 0$ នោះ $(f - \lambda id)$ ជាអនុវត្តន៍មិនប្រកាន់។ ដូច្នេះក្នុងលំហមានវិមាត្រកំណត់ វាសមមូលទៅនឹង៖

$$\det(f - \lambda id) = 0 \quad (6.6)$$

បើ $\{e_i\}$ ជាគោលមួយនៃ E និង

$$M(f)_{eI} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

ល័ក្ខខ័ណ្ឌដើម្បីអោយ λ ជាលំលៃផ្ទាល់ សរសេរ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6.8)$$

ដោយពន្លាតដេទែរមីណង់នេះ យើងទទួលបានសមីការទំរង់

$$(-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{6.9}$$

ដែលរឹសរបស់វាក្នុង $\mathbb{K}$ ជាតំលៃផ្ទាល់បៃ f ។
សមីការនេះហៅថាសមីការសំគាល់នៃ f និងពហុធានៃអង្គទីមួយហៅថាពហុធាសំណគាល និង គេកំណត់សរសេរដោយ $\chi_f(\lambda)$ ។
ដូច្នេះ យើងបានបកស្រាយសំណើខាងក្រោម៖

សំណើ 6.1. E ជាលំហវិុចទ័រមានវិមាត្រកំណត់ n និង $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ ។
តំលៃផ្ទាល់នៃ f ជារឹនៃពហុធា

$$\chi_f(\lambda) := \det(f - \lambda id) \tag{6.10}$$

$\chi_f(\lambda)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n នៃ λ ហៅថាពហុធាសំគាល់នៃ f ។

ឧទាហរណ៍ 6.4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ជាអង់ដូម័រភីសដែលក្នុងគោលកាណូនិចត្រូវបានតំណាងដោយម៉ាទ្រីស

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

យើងបាន

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \det(f - \lambda id) \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ តំលៃផ្ទាល់នៃ f គឺ $\lambda_1 = 2$ និង $\lambda_2 = 3$ ។

ចំណាំ 6.2. បើ $A = M(f)_{e_i}$ នោះ $\chi_f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ នឹងត្រកំណត់សរសេរ $\chi_A(\lambda)$ ។ ដូច្នេះ ជាការពិតណាស់ពហុធាសំគាល់អាស្រ័យនឹង f និង មិនមែនអាស្រ័យនឹងគោល $\{e_i\}$ ដែលបានជ្រើសរើសទេ ព្រោះដេទែរមីណង់នៃអង់ដូម័រភីសមិនអាស្រ័យនឹងគោលដែលក្នុងគោលនោះគេគណនាវា។

និយមន័យ និង កំណត់សរសេរ 6.1. សំណុំនៃតំលៃផ្ទាល់នៃ f ហៅថាស្ពិចនៃ f និង កំណត់សរសេរដោយ $Sp_{\mathbb{K}}(f)$ រឺ $Sp_{\mathbb{K}}(A)$ បើ A ជាម៉ាទ្រីសតំណាង f ។

សន្ទសន្សន៍ $\mathbb{K}$ ក្នុងកំណត់សរសេរគឺចាំបាច់ណាស់។ យើងពិនិត្យឧទាហរណ៍ខាងក្រោម។

ឧទាហរណ៍ 6.5. គេអោយម៉ាទ្រីស

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

យើងបាន

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

បើ A ជាម៉ាទ្រីសនៃ $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ នោះវាមានតំលៃផ្ទាល់ពីរ i និង $-i$ ។ ផ្ទុយទៅវិញបើ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ វាគ្មានតំលៃផ្ទាល់ទេ។ ដូច្នេះ យើងបាន

$$Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, +i\} \quad \text{និង} \quad Sp_{\mathbb{R}(A)} = \emptyset$$

ប៉ុន្តែ បើក្នុងអត្ថបទ គេបានបញ្ជាក់កាយ $\mathbb{K}$ ច្បាស់លាស់ គេក៏សរសេរ $Sp(f)$ រឺ ($Sp(A)$ ។

6.4 ការសិក្សាឡើងវិញអំពីពហុធា

យើងបានកំណត់សរសេរ $\mathbb{K}[X]$ សំណុំនៃពហុធាមានមេគុណ និងអថេរក្នុង $\mathbb{K}$ និង $\mathbb{K}_n[x]$ សំណុំនៃពហុធាដឺក្រេតូចជាងរឺស្មើនឹង n មានមេគុណ និងអថេរក្នុង $\mathbb{K}$ ។ សំណុំទាំងពីរប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីបូក និងប្រមាណវិធីគុណដោយស្កាលែរធម្មជាតិ ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយ។
នៅវគ្គនេះ យើងរំលឹក និយមន័យ និងលក្ខណៈនៃពហុធាដែលយើងនឹងប្រើវានៅបន្ទាប់។

6.4.1 ទ្រឹស្តីបទនៃប្រមាណវិធីចែកអឺគ្លីត

ទ្រឹស្តីបទ និង និយមន័យ 6.1. $A, B \in \mathbb{K}[x]$ ជាមួយនឹង $B \neq 0$ ។ ដូច្នេះមានតែមួយគូគត់នៃពហុធា (Q, R) ដែល

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \quad \text{ជាមួយនឹង} \quad d^\circ(R) < d^\circ(B) \tag{6.11}$$

ដែល $d^\circ(P)$ កំណត់សំគាល់ដឺក្រេនៃពុហា P ។
Q ហៅថាផលចែក និង R ហៅថាសំណល់នៃប្រមាណវិធីចែកអឺគ្លីតនៃ A ដោយ B ។
បើសំណល់នៃប្រមាណវិធីចែកអឺគ្លីតនៃ A ដោយ B ស្មើនឹងសូន្យ គេថា B ចែកដាច់ A រឺ A ចែកដាច់នឹង B និងគេកំណត់សរសេរ $B|A$ ។

6.4.2 រឹសនៃពហុធា

និយមន័យ និង លក្ខណៈ 6.1. $P \in \mathbb{K}[x]$ និង $a \in \mathbb{K}$ ។ គេថា a ជារឹសនៃ P បើ

$$P(a) = 0 \tag{6.12}$$

ដែល $P(a)$ តាងតំលៃនៃពហុធាត្រូវដែលបានបង្កើតទៅនឹង P ។
ដូច្នេះ គេបាន

$$\begin{aligned} a \text{ ជារឹសនៃ } P \quad &\Leftrightarrow \quad (x-a)|P \\ &\Leftrightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{K}[x],\ P(x) = (x-a)Q(x) \end{aligned} \tag{6.13}$$

6.4.3 ពហុរឹសនៃពហុធា

និយមន័យ និង លក្ខណៈ 6.2. $P \in \mathbb{K}[x]$ និង $a \in \mathbb{K}$ ។ គេថា a ជាពហុរឹសលំដាប់ k នៃ P បើ$(x-a)^k$ ចែកដាច់ $P(x)$ និង $(x-a)^{k+1}$ មិនចែកដាច់ $P(x)$ ។ ដូច្នេះគេអាចសរសេរ

$$P(x) = (x-a)^k Q(x) \quad Q \in \mathbb{K}[x] \text{ ជាមួយនឹង } Q(a) \neq 0 \tag{6.14}$$

បើ $a_1, \cdots, a_p$ ជាពហុរឹសលំដាប់ $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ រៀងគ្នានៃ P យើងអាចសរសេរ

$$P(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x - a_p)^{\alpha_p} Q(x) \quad Q \in \mathbb{K}[x], Q(a_i) \neq 0,\ i = 1, \cdots, k \tag{6.15}$$

ជាវិបាក ពហុធាមួយមានដឺក្រេ n មានយ៉ាងច្រើន n រឹស ដោយរាប់ទាំងពហុរឹស។

6.4.4 ពហុធាសាំងដេ

និយមន័យ 6.3. $P \in \mathbb{K}[x]$ មានដឺក្រេ n ។ គេថាពហុធា P ហៅថាសាំងដេ ក្នុង $\mathbb{K}$ បើ P មាន n រឹស ដោយទាំងពហុរឹសក្នុង $\mathbb{K}$ ។

ឧទាហរណ៍ 6.6. 1. ពហុធា

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

ជាពហុធាសាំងដេ ក្នុង $\mathbb{R}$ ។

2. ពហុធា

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x - 2)$$

ជាពហុធាសាំងដេ ក្នុង $\mathbb{R}$ ។

3. ពហុធា

$$P(x) = x^2 + 1$$

មិនមែនជាពហុធាសាំងដេ ក្នុង $\mathbb{R}$ ។ ប៉ុន្តែវាជាពហុធាសាំងដេ ក្នុង $\mathbb{C}$ ។

សំណើ 6.2. ពហុធាសាំងដេ P មួយដែលរឹសរបស់វាគឺ $a_1, \cdots, a_p$ ជាពហុរឹសផ្សេងគ្នាពីរៗលំដាប់ $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ រៀងគ្នា អាចសរសេរ

$$P(x) = a(x - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x - a_p)^{\alpha_p} \text{ ជាមួយនឹង } a \in \mathbb{K} \text{ និង } \alpha_1 + \cdots + \alpha_p = d^\circ(P) \tag{6.16}$$

ទ្រឹស្តីបទ 6.2. គ្រប់ពហុធានៃ $\mathbb{C}[x]$ ជាពហុធាសាំងដេ ក្នុង $\mathbb{C}$ *i.e.* ពហុធាដឺក្រេទី n $(n > 0)$ នៃ $\mathbb{C}[x]$ ជាពហុធាសាំងដេ ក្នុង $\mathbb{C}$ ។ ជាពិសេសគ្រប់ពហុធានៃ $\mathbb{R}[x]$ ត្រូវបានចាត់ទុកជាពហុធាសាំងដេ ក្នុង $\mathbb{C}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 6.3. គ្រប់ពហុធានៃ $\mathbb{C}[x]$ ជាពហុធាសាំងដេ ក្នុង $\mathbb{C}$ *i.e.* ពហុធាដឺក្រេទី n $(n > 0)$ នៃ $\mathbb{C}[x]$ ជាពហុធាសាំងដេ ក្នុង $\mathbb{C}$ ។ ជាពិសេសគ្រប់ពហុធានៃ $\mathbb{R}[x]$ ត្រូវបានចាត់ទុកជាពហុធាសាំងដេ ក្នុង $\mathbb{C}$ ។

តាមពិត ស្ថានភាពនេះអាចទូទៅកម្ម។ គេអាចបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់កាយ K [1] មានកាយមួយ $K' \supset K$ ដែល បើ P ជាពហុធាដឺក្រេទី n មានមេគុណក្នុង K' (ដូច្នេះ P មានមេគុណក្នុង K) នោះ P មានពិតប្រាកដ n រឹសក្នុង K' ។ K' ហៅថាគំរបពិជគណិតនៃ K (ដូច្នេះ $\mathbb{C}$ ជាគំរបពិជគណិតនៃ $\mathbb{R}$) ។ គ្រប់ពហុធា $P \in K[x]$ អាចសរសេរក្រោមទំរង់ (6.16) ពេលដែលគេចាត់ទុករឹស $a_1, \cdots, a_n$ ក្នុង $\mathbb{K}'$ ។ ដូចជាឧទាហរណ៍ $P(x) = x^2 + 1$ សរសេរ $P(x) = (x - i)(x + i)$ ។

[1] K នៅពេលនេះ ជាកាយទូទៅ។

វិបាក 6.1. បើ E ជា $\mathbb{K}$-លំហវ៉ិចទ័រ មានវិមាត្រ n នោះអង់ដូរម័រភីស f លើ E មានយ៉ាងច្រើន n តំលៃផ្ទាល់ (បើ E មានវិមាត្រមិនកំណត់ នោះស្ពិចនៃ f អាចមិនកំណត់)។ បើ χ_f ជាពហុធាសាំងដេ ក្នុង $\mathbb{K}$ វាអាចសរសេរ

$$\chi_f(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x-\lambda_p)^{\alpha_p} \tag{6.17}$$

ដែល $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ ជាតំលៃផ្ទាល់នៃ f មានលំដាប់ $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ រៀងគ្នា។

6.4.5 ពហុធាបឋមរវាងគ្នា

និយមន័យ 6.4. ពហុធា $P_1, \cdots, P_r \in \mathbb{K}[x]$ ហៅថាបឋមរវាងគ្នា បើពហុធាចែកដាច់ $P_1, \cdots, P_r$ ជាពហុធាថេរ *i.e.*

$$P_{0i}(x) | P_i(x), \quad i = 1, \cdots, r \tag{6.18}$$

ដែល $P_{0i}, i = 1, \cdots, n$ ជាពហុធាថេរ។

ជាការពិតណាស់ បើ $P_1, \cdots, P_r$ ជាពហុធាសាំងដេ។ វាជាពហុធាបឋមរវាងគ្នាលុះត្រាតែវាគ្នារឹសរួម។

ទ្រឹស្តីបទ 6.4 (ទ្រឹស្តីបទបឹហ្សូ). $P_1, \cdots, P_r \in \mathbb{K}[x]$ បឋមរវាងគ្នា លុះត្រាតែវាមានពហុធា $U_1, \cdots, U_r \in \mathbb{K}[x]$ ដែល

$$P_1(x)U_1(x) + \cdots + P_r(x)U_r(x) = 1 \tag{6.19}$$

6.5 ការរកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់

ក្នុងលំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់ ពេលដែលតំលៃផ្ទាល់ត្រូវបានគណនា យើងគណនាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរទំរង់ម៉ាទ្រីស

$$(A - \lambda I)v = 0 \tag{6.20}$$

តទៅនេះ យើងអោយឧទាហរណ៍ខ្លះៗដើម្បីបង្ហាញ។

ឧទាហរណ៍ 6.7. យើងលើកយកសារជាថ្មីឧទាហរណ៍ 6.4 ។ f ជាអង់ដូម័រភីសនៃ $\mathbb{R}^2$ ដែលក្នុងគោលកាណូនិចត្រូវបានតំណាងដោយម៉ាទ្រីស

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

យើងបានដឹងហើយថាតំលៃផ្ទាល់នៃ f ជាចំនួន $\lambda_1 = 2$ និង $\lambda_2 = 3$ ។ ដូច្នេះមានវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ពីរ v_1 និង v_2 ដែលត្រូវគ្នាដែល

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 \quad \text{និង} \quad f(v_2) = \lambda_2 v_2$$

ការគណនានៃ v_1

យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ មានន័យថា $(f - \lambda_1 id)v_1 = 0$ ។

ដោយសរសេរសមីការនេះក្នុងគោលកាណូនិច និងដោយកំណត់យក $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសនៃ v_1 យើងបាន

$$(A - 2I)v_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

តាមភាពសមមូល យើងបាន

$$-x + 2y = 0$$

ដោយយក $y = t, t \in \mathbb{R}^*$ យើងបាន $x = 2t$ ។ ដូច្នេះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ $v_1 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យកូលីនេអ៊ែរនឹងវ៉ិចទ័រ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ។

ការគណនានៃ v_2

យើងត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីកា $(f - 3id)v_2 = 0$ ។ ដោយយក $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ក្នុងគោលកាណូនិច យើងបាន

$$(A - 3I)v_2 = 0 \quad \text{មានន័យថា} \quad \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

រួច

$$-2x + 2y = 0$$

យើងយក $y = t, t \in \mathbb{R}^*$ ដើម្បីបាន $x = t$ ។ ដូច្នេះ $v_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ មានន័យថាជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យកូលីនេអ៊ែរទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ។

ដូច្នេះយើងបានវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ពីរដែលយើងតាងជាថ្មីដោយ $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ និង $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ។ យើងឃើញថា (v_1, v_2) ជាគោលមួយនៃ $\mathbb{R}^2$ ព្រោះ $\det ||v_1, v_2|| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ ។ ជាវិបាក f ជាអង់ដូម័រភីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម និង

$$M(f)_{v_i} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ម៉ាទ្រីសប្ដូរគោល $P_{e_i \to v_i}$ ជាម៉ាទ្រីស

$$P = ||v_1, v_2||_{e_i} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

យើងឃើញយ៉ាងងាយថា $A' = P^{-1}AP$ ដែល $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ។

ចំណាំ 6.3. ដើម្បីរកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ យើងត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $(A-\lambda I)v = 0$ ។ ដោយសារតែ $(\det A-\lambda I) = 0$ ព្រោះ λ ជាតំលៃផ្ទាល់។ ដូច្នេះមួយយ៉ាងតិចនៃជួរដេកនៃ $A-\lambda I$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃជួរដេកផ្សេងទៀត។ ជាវិបាក យើងទទួលបានជានិច្ចប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូហ្សែនដែលក្នុងនោះសមីការមួយយ៉ាងតិចជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃសមីការផ្សេងទៀត។ ដូច្នេះវាត្រូវបំបាត់ចោល។

6.6 ការកំណត់នៃអង់ដូម័រភីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម

សំណើ និង និយមន័យ 6.1. E ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ។ យក $\lambda \in \mathbb{K}$ និង គេកំណត់

$$E_\lambda := \{v \in E \mid f(v) = \lambda v \tag{6.21}$$

ដូច្នេះ E_λ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E ហៅថាលំហវ៉ិចទ័ររងផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង λ ។

សំរាយបញ្ជាក់

1. ជាការពិតណាស់ $E_\lambda \neq \emptyset$ ព្រោះវាផ្ទុកធាតុ 0 ។ ដោយហេតុថា $f(0) = 0 = \lambda 0$ ។
2. ឥឡូវនេះ យើងយក $v_1, v_2 \in E_\lambda$ និង $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ យើងបាន

$$\begin{cases} f(v_1) &= \lambda v_1 \\ f(v_2) &= \lambda v_2 \end{cases}$$

តាមផលបូក យើងបាន

$$k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) = \lambda(k_1 v_1 + k_2 v_2)$$

i.e.

$$f(k_1 v_1 + k_2 v_2) = \lambda(k_1 v_1 + k_2 v_2)$$

ដូច្នេះ $k_1 v_1 + k_2 v_2 \in E_\lambda$ ។

ចំណាំ 6.4. 1. បើ λ មិនមែនតំលៃផ្ទាល់ យើងបាន $E_\lambda = \{0\}$ ។

2. λ ជាតំលៃផ្ទាល់ យើងបាន $E_\lambda = \{\text{វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង } \lambda\} \cup \{0\}$ និង $\dim E_\lambda \geq 1$ ។

សំណើ 6.3. $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ជាតំលៃផ្ទាល់ផ្សេងគ្នាពីរៗ។ ដូច្នេះលំហផ្ទាល់ $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_p}$ ជាផលបូកផ្ទាល់។ តាមទ្រឹស្តីបទ 1.7 នៃជំពូក 1 សំណើនេះមានន័យថា $\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_p$ ជាគ្រួសារសេរីនៃ $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_p}$ នោះគ្រួសារ $\{\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}\}$ ជាគ្រួសារសេរីនៃ E ។ ជាពិសេសស បើ $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ ជាគោលនៃ$E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_p}$ នោះគ្រួសារ $\{\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p\}$ ជាគ្រួសារសេរីនៃ E ។

សំរាយបញ្ជាក់

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារណ៍ដោយកំណើនលើ p។

1. ចំពោះ $p = 1$ សំណើខាងលើពិតជាត្រឹមត្រូវ។

2. ឧបមាថាគ្រួសារ $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_p}$ ជាផលបូកផ្ទាល់។ យើងនឹងស្រាយថាគ្រួសារ $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_p}, E_{\lambda_{p+1}}$ ក៏ជាផលបូកផ្ទាល់ដែរ។ តាមសំណើ 1.4 នៃជំពូក 1 យើងត្រូវបង្ហាញថា បើ

$x \in (E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p}) \cap E_{\lambda_{p+1}}$ នោះ $x = 0$ ព្រោះលក្ខណៈផ្សេងទៀតត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយសារតែសម្មតិកម្មកំណើន $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_p}$ ជាផលបូកផ្ទាល់។
ដូច្នេះ យក $x = x_1 + \cdots + x_p$ ជាមួយនឹង $x_k \in E_{\lambda_k}$ ។ យើងបាន

$$f(x) = f(x_1) + \cdots + f(x_p) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p$$

ដោយហេតុថា $x_i \in E_{\lambda_i}, i = 1, \cdots p$ ។
ម៉្យាងវិញទៀត $x \in E_{\lambda_{p+1}}$ យើងបាន

$$f(x) = \lambda_{p+1} x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{p+1} x_p$$

ដោយធ្វើផលដក យើងបាន

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_{p+1})x_1 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_{p+1})x_p$$

ដោយសារតែ $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_p}$ ជាផលបូកផ្ទាល់។
ដូច្នេះ $0_E = 0_{E_{\lambda_1}} + \cdots + 0_{E_{\lambda_p}}$ ជាការបំបែកតែមួយគត់នៃ 0 ។ យើងទទួលបាន

$$(\lambda_k - \lambda_{p+1})x_k = 0 \quad k = 1, \cdots, p$$

ដោយសារតែ λ_i ផ្សេងគ្នាពីរៗ យើងបាន $x_k = 0$ ចំពោះ $k = 1, \cdots, p$ *i.e.* $x = 0$ ។
ដូច្នេះលឋិហាវិចទ័រផ្ទាល់ជានិច្ចកាលជាផលបូកផ្ទាល់ ប៉ុន្តែវាអាចផលបូករបស់វាមិនបំពេញ E ទាំងមូល មានន័យថា គេនឹងអាចបាន $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} \subset E$ ហើយដូច្នេះ $\dim E_{\lambda_i} + \cdots + \dim E_{\lambda_p} < n$ ។

វិបាក 6.2. E ជាលំហវិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ មានវិមាត្រកំណត់ និង $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ ។
f អង្កត់ទ្រូងកម្ម លុះត្រាតែ E ជាផលបូកផ្ទាល់នៃលំហផ្ទាល់។
នេះមានន័យថា បើគេយក $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ជាតំលៃផ្ទាល់ផ្សេងគ្នាពីរៗនៃ f នោះគេបាន
f អង្កត់ទ្រូងកម្ម លុះត្រាតែ $E = E_{\lambda_i} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ ។
តាមភាពសមមូល គេបាន

$$f \text{ អង្កត់ទ្រូងកម្ម} \quad \Leftrightarrow \quad \dim E = \dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p} \tag{6.22}$$

សំរាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ ។ នេះមានន័យថា បើ $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ ជាគោលរៀងគ្នានៃ $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_p}$ នោះ $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p\}$ ជាគោលមួយនៃ E ។ ដោយសារតែ $\mathcal{B}$ ត្រូវបានបង្កើតឡើងដោយវិចទ័រផ្ទាល់ នោះ f ជាអង់ដូម័រភីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម។
ច្រាសមកវិញ ឧបមាថាមានគោល $\mathcal{B}$ នៃ E បង្កើតឡើងដោយវិចទ័រផ្ទាល់។ យើងយក

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{v_1, \cdots, v_{n_1}}_{\text{គ្រួសារនៃ } E_{\lambda_1}}, \cdots, \underbrace{w_1, \cdots, w_{n_p}}_{\text{គ្រួសារនៃ } E_{\lambda_p}}\}$$

ពីនេះ យើងឃើញថា $\dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p} = \dim E$ និង ដូច្នេះ $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ ។
ដូច្នេះវិមាត្រនៃលំហវ៉ិទ័រផ្ទាល់មានសារៈសំខាន់ក្នុងចំណោទនៃអង្កត់ទ្រូងកម្ម។ ព័ត៌មាននៃវិមាត្រនៃលំហវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ត្រូវបានមើលឃើញជានិច្ចលើពហុធាសំគាល់។ គេបានសំណើខាងក្រោម។

សំណើ 6.4. E ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ មានវិមាត្រកំណត់។ $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ និង λ ជាតំលៃផ្ទាល់មានពហុគុណ[2] α ។ ដូច្នេះ គេបាន

$$\dim E_\lambda \le \alpha \tag{6.23}$$

សំរាយបញ្ជាក់

ឧបមាតាមភាពផ្ទុយពីការពិតថា $\dim E_\lambda \ge \alpha+1$ ។ យក $v_1, \cdots, v_{\alpha+1}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នាត្រូវនឹងតំលៃផ្ទាល់ λ ។ យើងបំពេញរូបមន្តនេះដើម្បីបានគោល $\mathcal{B}$ មួយនៃ E ៖ $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_{\alpha+1}, e_{\alpha+2}, \cdots, e_n\}$ ។ យើងបាន

$$M(f)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & \cdots & 0 & A \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \lambda & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right)$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} \chi_f(x) &= \det \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda - x & \cdots & 0 & A \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \lambda - x & \\ \hline & 0 & & B - xI \end{array}\right) \\ &= (\lambda - x)^{\alpha+1} \det(B - xI) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ យើងឃើញថា λ ជាតំលៃផ្ទាល់លំដាប់ $\alpha + 1$ ។ លទ្ធផលនេះផ្ទុយពីការពិត។
ទ្រឹស្តីបទចំបងលើអង្កត់ទ្រូងកម្មជាវិបាកនៃសំណើ 6.3 និង 6.4 ។

ទ្រឹស្តីបទ 6.5. E ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ មានវិមាត្រកំណត់ និង $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ ។ f ជាអង់ដូម័រភីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម លុះត្រាតែ

1. $\chi_f(x)$ ជាពហុធាសាំងដេ ក្នុង $\mathbb{K}$ មានន័យថា $\chi_f(x)$ អាចសរសេរ

$$\chi_f(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x - \lambda_p)^{\alpha_p} \tag{6.24}$$

ជាមួយនឹង $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ និង $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n$

2. ចំពោះតំលៃផ្ទាល់ λ_i និមួយៗនៃមានពហុគុណ α_i

$$\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i \tag{6.25}$$

សំរាយបញ្ជាក់

[2] λ ជារឹសលំដាប់ α នៃពហុធាសំគាល់ $\chi_f(\lambda)$ ។

1. បើលក្ខខ័ណ្ឌ 1 និង 2 នៃទ្រឹស្ដីបទ 6.5 ផ្ទៀងផ្ទាត់ គេបាន

$$\dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_P} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n$$

ដូច្នេះ តាមវិបាក 6.2 នោះ f ជាអង់ដូម័រភីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម។

2. ច្រាសមកវិញ ឧបមាថា f ជាអង់ដូម័រភីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម។ បើ

$\chi_f(x)$ មិនមែនជាពហុធាសាំងដេ វានឹងមានទំរង់

$$chi_f(x) = Q(x)(x-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x-\lambda_k)^{\alpha_k} \text{ ជាមួយនឹង } \alpha_1 + \cdots + \alpha_k < n$$

ដូច្នេះ យើងបាន $\dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_k} \leq \alpha_1 + \alpha_k < n$ ។ លទ្ធផលនេះមិនពិត ហើយដូច្នេះ $\chi_f(x)$ ជាពហុធាសាំងដេ។ ដូច្នេះ យើងបានលក្ខខណ្ឌ 1 នៃទ្រឹស្ដីបទ 6.5 ។
បើមាន λ_j មួយដែល $\dim E_{\lambda_j} < \alpha_j$ យើងបាន

$$\dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p} < \alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n$$

លទ្ធផលនេះមិនពិត ហើយដូច្នេះ យើងបានលក្ខខណ្ឌ 2 នៃទ្រឹស្ដីបទ 6.5 ។

វិបាក 6.3. E ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ មានវិមាត្រ n និង $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ ។ បើ f មាន n តំលៃផ្ទាល់ផ្សេងគ្នាពីរៗ នោះ f ជាអង់ដូម័រភីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម។

សំរាយបញ្ជាក់
f មាន n តំលៃផ្ទាល់ធម្មតា មានន័យថាគ្រប់ពហុគុណនៃរឺសទាំងអស់ស្មើនឹង 1 ។ ដោយសារតែ បើ λ ជាតំលៃផ្ទាល់ធម្មតា គេបានចាំបាច់ $\dim E_\lambda = 1$ ។ ដូច្នេះ f ជាអង់ដូម័រភីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម។

ឧទាហរណ៍ 6.8. គេមានម៉ាទ្រីស

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

យើងបាន $\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ ។
ដូច្នេះ ម៉ាទ្រីស A មានតំលៃផ្ទាល់បីផ្សេងគ្នា និង ដូច្នេះ តាមវិបាក 6.3 វាជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម។
ដើម្បីបង្រួមម៉ាទ្រីស A យើងកំណត់លំហរងផ្ទាល់។

កំណត់ E_0 ៖ យក $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ។ $v_1 \in E_0$ លុះត្រាតែ $Av_1 = 0$ ។ ដូច្នេះ យើងបានប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{cases} 2x & & + & 4z & = & 0 \\ 3x & - & 4y & + & 12z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 5z & = & 0 \end{cases}$$

ដោយដោះស្រាយ យើងបាន

$$E_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

កំណត់ E_1 ៖ ដូចគ្នានឹងករណីនៃ E_0 ដែរ យើងយក $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $(A - I)v_2 = 0$ ។
យើងបានប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{cases} x & & & + & 4z & = & 0 \\ 3x & - & 5y & + & 12z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \end{cases}$$

ដូច្នេះយើងបាន

$$E_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

កំណត់ E_2 ៖ យើងយក $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ យើងបាន $(A - I)v_2 = 0$ ។ ដូច្នេះ យើងបានប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{cases} & & & & 4z & = & 0 \\ 3x & - & 6y & + & 12z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \end{cases}$$

ដូច្នេះយើងបាន

$$E_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ដូច្នេះ ម៉ាទ្រីស A ដូចទៅនឹងម៉ាទ្រីស $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ និងម៉ាទ្រីសប្តូរគោលជាម៉ាទ្រីស $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ។

ឧទាហរណ៍ 6.9. គេមានម៉ាទ្រីស

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

យើងបាន $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$ រួច $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -2\}$ ។
យើងឃើញថា 1 ជាតំលៃផ្ទាល់ធម្មតា និង -2 ជាតំលៃផ្ទាល់មានពហុគុណ 2 ។ ដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទ 6.5 ម៉ាទ្រីស A ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម លុះទ្រាតែលំហវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងតំលៃផ្ទាល់ 1 និង -2 មានវិមាត្រ 1 និង 2 រៀងគ្នា *i.e.* $\dim E_1 = 1$ និង $\dim E_{-2} = 2$ ។

កំណត់ E_1 ៖ យើងយក $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ យើងបាន $(A - I)v = 0$ ។ ដូច្នេះ យើងបានប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{cases} -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{cases}$$

ដូច្នេះយើងបាន

$$E_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

រួច

$$\dim E_1 = 1$$

កំណត់ E_{-2} ៖ យើងយក $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ យើងបាន $(A+2I)v = 0$ ។ ដូច្នេះ យើងបានប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

ដូច្នេះ E_{-2} ជាប្លង់វ៉ិចទ័រសមីការ $x+y+z=0$ និង យើងបាន

$$E_{-2} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

រួច

$$\dim E_{-2} = 2$$

ដូច្នេះម៉ាទ្រីស A ដូចទៅនឹងម៉ាទ្រីស $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ និង $A' = P^{-1}AP$ ជាមួយនឹង $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ។

ឧទាហរណ៍ 6.10. គេអោយម៉ាទ្រីស

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

យើងបាន $\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 3)$ ។
ដូច្នេះ

$$Sp_{\mathbb{R}}A = \{0\} \quad \text{និង} \quad Sp_{\mathbb{C}} = \left\{ 0, \frac{-3+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-3-\sqrt{3}i}{2} \right\}$$

ដូច្នេះ A មិនមែនជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងកម្មក្នុង $\mathbb{R}$ ព្រោះពហុធាសំគាល់មិនមែនជាពហុធាសាំងដេក្នុង $\mathbb{R}$ ។ ប៉ុន្តែ តាមវិបាក 6.3 ម៉ាទ្រីស A ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងកម្មក្នុង $\mathbb{C}$ មានន័យថា វាដូចទៅនឹងម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងមួយមានធាតុជាចំនួនកុំផ្លិច ប៉ុន្តែមិនមែនជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងមានមេគុណជាចំនួនពិត។

ឧទាហរណ៍ 6.11. គេអោយម៉ាទ្រីស

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

យើងបាន $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$ រួច $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -2\}$ ។
ដូច្នេះ A ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម លុះត្រាតែ $\dim E_1 = 2$ និង $\dim E_{-2} = 1$ ។
ចំពោះ E_1 យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} -5x & & - & z & = & 0 \\ 5x & + \; y & + & 2z & = & 0 \end{cases}$$

ដូច្នេះ E_1 ជាបន្ទាត់វ៉ិចទ័រ និង យើងបាន $\dim E_1 = 1$ ។ ដូច្នេះ A មិនមែនជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងកម្មក្នុង $\mathbb{R}$ និង មិនមែនអង្កត់ទ្រូងកម្មក្នុង $\mathbb{C}$ ។

6.7 ការអនុវត្តន៍

6.7.1 ការគណនាស្វ័យគុណនៃម៉ាទ្រីស

គេមានម៉ាទ្រីស $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ។ ឧបមាថា A ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម។ ដូច្នេះមានម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង A' និង ម៉ាទ្រីសមានចំរាស់ P នៃ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ដែល

$$A' = P^{-1}AP \tag{6.26}$$

ដូច្នេះ

$$A = PAP^{-1} \tag{6.27}$$

យក $k \in \mathbb{N}^*$ ។ យើងបាន

$$A^k = \underbrace{(PA'P^{-1})(PA'P^{-1})\cdots(PA'P^{-1})}_{k\text{ តួ}}$$

គេបាន

$$A^k = P(A')^kP^{-1} \tag{6.28}$$

ត្បិត $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ យើងបាន $(A')^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ ។
ដូច្នេះ យើងអាចគណនា A^k យ៉ាងងាយតាមរូបមន្ត

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} \tag{6.29}$$

ឧទាហរណ៍ 6.12. គេអោយម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ។ គណនា A^n ដែល $n \in \mathbb{N}^*$ ។

យើងបាន $\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3)$ រួច $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{2,3\}$ ។
ដូច្នេះ A ដូចទៅនឹងម៉ាទ្រីស $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ។ ដោយគណនា យើងបាន $E_2 = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ និង $E_3 = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ ។
ដូច្នេះ យើងបានម៉ាទ្រីសប្តូរគោល $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ រួច $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ។
ដូច្នេះ តាមរូបមន្ត (6.29) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-3^n & 2^{n+1}-2\times 3^n \\ -2^n+3^n & -2^n+2\times 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.7.2 ការកំណត់ស្វ៊ីតកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែរលំដាប់មួយ

គេមាន p ស្វ៊ីត $(u_{1,n}), (u_{2,n}), \cdots u_{p,n}$ ដែលមានធាតុក្នុង $\mathbb{K}$ កំណត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយទំនាក់ទំនងកំណើនលីនេអ៊ែរលំដាប់មួយ

$$\left\{\begin{array}{lcccccccc} u_{1,n+1} & = & a_{11}u_{1,n} & + & a_{12}u_{2,n} & + & \cdots & + & a_{1p}u_{p,n} \\ u_{2,n+1} & = & a_{21}u_{1,n} & + & a_{22}u_{2,n} & + & \cdots & + & a_{2p}u_{p,n} \\ \vdots & & & & & & & & \\ u_{p,n+1} & = & a_{p1}u_{1,n} & + & a_{n2}u_{2,n} & + & \cdots & + & a_{pp}u_{p,n} \end{array}\right. \tag{6.30}$$

និង

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{1,0} & = & \alpha_1 \\ u_{2,0} & = & \alpha_2 \\ \vdots & & \\ u_{p,0} & = & \alpha_n \end{array}\right. \tag{6.31}$$

ដែល $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ជាចំនួនដែលអោយក្នុង $\mathbb{K}$ ។
ទំនាក់ទំនង (6.30) អាចសរសេរ

$$\begin{pmatrix} u_{1,n+1} \\ u_{2,n+1} \\ \vdots \\ u_{p,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,n} \\ u_{2,n} \\ \vdots \\ u_{p,n} \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

រួច

$$X_{n+1} = AX_n \tag{6.33}$$

ដែល $X_n = \begin{pmatrix} u_{1,n} \\ u_{2,n} \\ \vdots \\ u_{p,n} \end{pmatrix}$ និង $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}$ ។ យើងទាញបាន

$$X_n = A^n X_0 \tag{6.34}$$

ដូច្នេះ វាជាការគណនាស្វ័យគុណនៃម៉ាទ្រីស។

ឧទាហរណ៍ 6.13. កំណត់ស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & u_n & - & v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n & + & 4v_n \end{array}\right.$$

និង

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & 1 \end{array}\right. \tag{6.35}$$

គេយក $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ ទំនាក់ទំនង (6.35) អាចសរសេរ

$$X_{n+1} = AX_n$$

ដែល $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ និង។ ដូច្នេះយើងបាន

$$X_n = A^n X_0 \quad \text{ជាមួយនឹង} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ដូច្នេះ យើងឈានទៅដល់ការគណនានៃ A^n ។ តាមលទ្ធផលនៃឧទាហរណ៍ 6.12 យើងបាន

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2 \times 3^n \\ -2^n + 3^n & -2^n + 2 \times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 2 \times 3^n + 2^{n+1} - 2 \times 3^n \\ -2^{n+1} + 2 \times 3^n - 2^n + 2 \times 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

មានន័យថា

$$\left\{\begin{array}{l} u_n = 3 \times 2^{n+1} - 4 \times 3^n \\ v_n = -3 \times 2^n + 4 \times 3^n \end{array}\right.$$

6.7.3 ប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរមានមេគុណថេរ

គេអោយប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\left\{\begin{array}{rcrcccc} \dfrac{dx_1}{dt} & = & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & a_{12}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & & & & & \\ \dfrac{dx_n}{dt} & = & a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n \end{array}\right. \tag{6.36}$$

ដែល $a_{ij} \in \mathbb{K}$ និង $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ។
ក្រោមទំរង់ម៉ាទ្រីស ប្រព័ន្ធ (6.40) សរសេរ

$$\frac{dX}{dt} = AX \tag{6.37}$$

ដែល $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ និង $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ។

ឧបមាថា A ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម។ នោះមានម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង A' និង ម៉ាទ្រីសមានចំរាស P នៃ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ដែល

$$A' = P^{-1}AP \tag{6.38}$$

បើគេចាត់ទុក A ជាម៉ាទ្រីសនៃអង់ដូមរភីស f មួយក្នុងគោលកាណូនិច នោះ A' ជាម៉ាទ្រីសនៃ f ក្នុងគោលនៃវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ (v_i) ។
ដូចគ្នាដែរ X ជាម៉ាទ្រីសនៃវ៉ិចទ័រ x ក្នុងគោលកាណូនិច និង X' ជាម៉ាទ្រីសនៃវ៉ិចទ័រ x ក្នុងគោល (v_i) *i.e.* $X = M(x)_{e_i}$ និង $X' = M(x)_{v_i}$ គេបាន

$$X' = P^{-1}X$$

តាមសមូល

$$X = PX'$$

ដោយធ្វើដេរីវេទំនាក់ទំនង (6.38) យើងបាន

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt}$$

ព្រោះA មានមេគុណថេរ និង P នឹងមានមេគុណថេរដែរ។
ដូច្នេះ

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}AX = (P^{-1}AP)X'$$

ដូច្នេះ ដោយប្រើទំនាក់ទំនង (6.38) ប្រព័ន្ធឌីផេរ៉ង់ស្យែល (6.37) សមមូលទៅនឹងប្រព័ន្ធឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\frac{dX'}{dt} = A'X'$$

ត្បិត $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ ដូច្នេះ បើគេយក $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ គេទទួលបាន

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dx'_1}{dt} & = & \lambda_1 x'_1 \\ \dfrac{dx'_2}{dt} & = & \lambda_2 x'_2 \\ \vdots & & \\ \dfrac{dx'_n}{dt} & = & \lambda_n x'_n \end{array}\right. \tag{6.39}$$

សមីការនិមួយៗនៃប្រព័ន្ធជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលធម្មតា។ ដូច្នេះ យើងបាន

$$\begin{cases} x_1' &= C_1e^{\lambda_1 t} \\ x_2' &= C_2e^{\lambda_2 t} \\ \vdots & \\ x_n' &= C_ne^{\lambda_n t} \end{cases} \tag{6.40}$$

ដែល $C_1, C_2, \cdots, C_n \in \mathbb{K}$ ដែលអោយ។
ដូច្នេះគេអាចកំណត់អនុគមន៍ X ដោយប្រើទំនាក់ទំនង (6.7.3) ។
ដូច្នេះ គេអាចដោះស្រាយប្រព័ន្ធ

$$\frac{dX}{dt} = AX \tag{6.41}$$

តាមបែបខាងក្រោម៖

1. គេធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មម៉ាទ្រីស A ពោលគឺ

$$A' = P^{-1}AP \tag{6.42}$$

ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងដូចទៅនឹងម៉ាទ្រីស A ។

2. គេដោះស្រាយប្រព័ន្ធឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\frac{dX'}{dt} = A'X' \tag{6.43}$$

3. គេត្រឡប់មករក X តាមទំនាក់ទំនង

$$X = PX' \tag{6.44}$$

ឧទាហរណ៍ 6.14. គេអោយប្រព័ន្ធឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + 4y \end{cases}$$

យើងមាន $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ។ ក្នុងករណីនេះ ដោយធ្វើការគណនា យើងបាន $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ និង $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ។
ដូច្នេះប្រព័ន្ធ $\frac{dX'}{dt} = A'X'$ សរសេរ

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} &= 2x' \\ \frac{dy'}{dt} &= 3y' \end{cases}$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$\begin{cases} x' = C_1e^{2t} \\ y' = C_2e^{3t} \end{cases}$$

ដែល $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ជាចំនួនថេរណាមួយ។
តាមរូបមន្ត (6.44) យើងបាន

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1e^{2t} \\ C_2e^{3t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ -C_1e^{2t} - 2C_2e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ដូច្នេះយើងបាន

$$\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ y = -C_1e^{2t} - 2C_2e^{3t} \end{cases}$$

6.8 ត្រីកោណកម្ម

និយមន័យ 6.5. ម៉ាទ្រីស $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ រៀងគ្នាជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោម បើវាមានទំរង់

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6.45}$$

រៀងគ្នា

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6.46}$$

ចំណាំ 6.5. គ្រប់ម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើដូចទៅនឹងម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោម។

ដោយហេតុថា បើ A ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ និង f ជាអង់ដូម័រភីសនៃ $\mathbb{K}^n$ ដែលនៅក្នុងគោលកាណូនិច (e_i) ត្រូវបានតាងដោយ A ៖

$$\begin{array}{rcccccccc} f(e_1) &=& a_{11}e_1 & & & & & & \\ f(e_2) &=& a_{12}e_1 &+& a_{22}e_2 & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ f(e_{n-1}) &=& a_{1,n-1}e_1 &+& a_{2,n-1}e_2 &+& \cdots &+& a_{n-1,n-1}e_{n-1} \\ f(e_n) &=& a_{1n}e_1 &+& a_{2,n}e_2 &+& \cdots &+& a_{nn}e_n \end{array}$$

យើងយកគោល (ε_i) កំណត់ដោយ

$$\varepsilon_1 = e_n, \varepsilon_2 = e_{n-1}, \cdots, \varepsilon_n = e_1$$

យើងបាន

$$\begin{array}{rcl} f(\varepsilon_1) & = & a_{1n}\varepsilon_n + a_{2n}\varepsilon_{n-1} + \cdots + a_{n-1,n-1}\varepsilon_2 + a_{nn}\varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_2) & = & a_{1,n-1}\varepsilon_n + a_{2,n-1}\varepsilon_{n-1} + \cdots + a_{n-1,n-1}\varepsilon_2 \\ \vdots & & \\ f(\varepsilon_n) & = & a_{11}\varepsilon_n \end{array}$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$A' = M(f)_{\varepsilon_i} = \begin{pmatrix} a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{1n} & \cdots & a_{22} & a_{11} \end{pmatrix}$$

ម៉ាទ្រីស A និង A' ជាម៉ាទ្រីសដូចគ្នាព្រោះវាតំណាងអង់ដូរមរភីស f តែមួយក្នុងគោលពីរផ្សេងគ្នា។

បញ្ហាដែលកើតឡើងគឺដឹងថាតើកាលណាម៉ាទ្រីស A មួយនៃ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ដូចទៅនឹងម៉ាទ្រីសត្រីកោណមួយនៃ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ។ ក្នុងន័យនៃអង់ដូមរភីស តើកាលណាអង់ដូមរភីសមួយត្រូវបានតាងក្នុងគោលណាមួយដោយម៉ាទ្រីសត្រីកោណមួយ។ តាមចំណាំ 6.5 យើងគ្រាន់តែសិក្សាករណីដែល A ដូចទៅនឹងម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ។

ទ្រឹស្តីបទ 6.6. E ជាលំហរ៉ិចទ័រមានវិមាត្រកំណត់លើ $\mathbb{K}$ និង $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ ។ f ជាអង់ដូមរភីសត្រីកោណកម្មក្នុង $\mathbb{K}$ លុះត្រាតែ ពហុធាសំគាល χ_f របស់វាជាពហុធាសាំងដេក្នុង $\mathbb{K}$ ។

វិបាក 6.4. គ្រប់ម៉ាទ្រីស $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ដូចទៅនឹងម៉ាទ្រីសត្រីកោណមួយនៃ $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ។
ជាពិសេស ម៉ាទ្រីស A មួយនៃ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ត្រូវបានចាត់ទុកជាម៉ាទ្រីស $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ដែលជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណ ។ ប៉ុន្តែ ជាទូទៅ មេគុណនៃម៉ាទ្រីសត្រីកោណដូច មិនមែនជាចំនួនពិត តែជាចំនួនកុំផ្លិច។ គេថា A ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណកម្មក្នុង $\mathbb{C}$ ប៉ុន្តែ ជាទូទៅមិនមែនត្រីកោណកម្មក្នុង $\mathbb{R}$ ។

សំរាយបញ្ជាក់

1. ឧបមាថា f ជាអង់ដូមរភីសត្រីកោណកម្ម និង $\{e_1, \cdots, e_n\}$ ជាគោលមួយនៃ E ដែល

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}\chi_f(x) &= \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-x & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}-x \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x)\end{aligned}$$

ដូច្នេះ χ_f ជាពហុធាសាំងដេ។

2. ច្រាសមកវិញ ឧបមាថា χ_f ជាពហុធាសាំងដេ។ យើងនឹងស្រាយតាមវាចារណ៍ដោយកំណើនថា f ជាអង់ដូមរភីសត្រីកោណកម្ម។

ចំពោះ $n=1$ នោះយើងគ្មានអ្វីបកស្រាយទេ (លទ្ធផលពិតជាត្រឹមត្រូវ)។

ឧបមាថាសំណើពិតដល់លំដាប់ $n-1$ ។ ដោយសារតែ χ_f ជាពហុធាសាំងដេ នោះវាមានយ៉ាងតិចរីស λ នៃ $\mathbb{K}$ ។ ដូច្នេះមានវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ $\varepsilon_1 \in E_\lambda$ មួយយ៉ាងតិច។
យើងនឹងបំពេញ $\{\varepsilon_1\}$ ដើម្បីបានគោល $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ មួយនៃ E ។
យើងបាន

$$A := \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

ដែល $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ ។
យក $F = [\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]$ ជាលំហវ៉ិចទ័របង្ករដោយវ៉ិចទ័រ $\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ និង $g : F \to F$ ជាអង់ដូមរភីសនៃ F ដែល $M(g)_{\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n} = B$ ។
យើងបាន

$$\begin{aligned}\chi_f(x) &= \det(A - xI_n) \\ &= (\lambda - x)\det(B - xI_{n-1}) \\ &= (\lambda - X)\chi_g(x)\end{aligned}$$

ដោយសារតែ χ_f ជាពហុធាសាំងដេ នោះ χ_g ក៏ជាពហុធាសាំងដេដែរ។ តាមសម្មតិកម្មនៃកំណើន B ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណកម្ម។ ដូច្នេះមានគោល $\{e_2, \cdots, e_n\}$ នៃ F ដែល $M(g)_{e_2,\cdots,e_n}$ ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណ។

ដូច្នេះក្នុងគោល $\{\varepsilon_1, e_2, \cdots, e_n\}$ ម៉ាទ្រីសនៃ f ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណ។

ចំណាំ 6.6. 1. បើ A ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណកម្ម នោះម៉ាទ្រីស A' ដូចទៅនឹង A មានតំលៃផ្ទាល់នៃ A នៅលើអង្កត់ទ្រូង។

2. គ្រប់ម៉ាទ្រីស $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណកម្មលើគំរបពិជគណិត K' នៃ K ។

វិបាក 6.5. គេអោយ $A \in \mathcal{M}_n(K)$ និង

$$Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \tag{6.47}$$

ដែលកំណត់សរសេរនៅពេលនេះ រឺសនៃពហុធាសំគាល់ ស្មើគ្នា រឺផ្សេងគ្នាយកក្នុងគំរបពិជគណិត K' នៃ K ។ គេបាន

$$Tr(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \tag{6.48}$$

និង

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{6.49}$$

សំរាយបញ្ជាក់

បើ $A' \in \mathcal{M}_n(K')$ ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណមួយដូចទៅនឹង A យើងបាន

$$Tr(A') = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

និង

$$\det(A') = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

ដោយសារតែម៉ាទ្រីសពីរដូចគ្នាមានគន្លងស្មើគ្នា និង មានដេទែរមីណង់ស្មើគ្នា។ ដូច្នេះរូបមន្ត (6.48) និង (6.49) ត្រូវបានបកស្រាយ។

ឧទាហរណ៍ 6.15. គេអោយម៉ាទ្រីស

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

យើងបាន $\chi_A(x) = -(x-1)^2(x+2)$ ។ ពហុធាសំគាល់ χ_A ជាពហុធាសាំងដេរក្នុង $\mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ A ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណកម្មក្នុង $\mathbb{R}$ ។

ដោយចាត់ទុក A ជាម៉ាទ្រីសនៃអង់ដូមរភីស f នៃ $\mathbb{R}^3$ ក្នុងគោលកាណូនិច $(e_i)_{1\le i\le 3}$ នោះមានគោល $(v_i)_{1\le i\le 3}$ មួយនៃ $\mathbb{R}^3$ ដែល

$$M(f)_{v_i} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$\begin{cases} f(v_1) = v_1 \\ f(v_2) = av_1 + v_2 \\ f(v_3) = bv_1 + cv_2 - 2v_3 \end{cases}$$

ការគណនានៃ v_1 មួយ (v_1 ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ត្រូវនឹង $\lambda_1 = 1$) ៖ យើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $(f - id)v_1 = 0$ *i.e.* $(A - I)v_1 = 0$ ។ យើងបានប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{cases} -5x \quad\quad - 2z = 0 \\ 5x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

ដូច្នេះ គេអាចយក $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ ។ ការគណនានៃ v_2 មួយ៖ យើងដោះស្រាយ $(f - id)v_2 = av_1$ *i.e.* $(A - I)v_2 = av_1$ ។ យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} -5x \quad\quad - 2z = 2a \\ 5x + y + 2z = -5a \end{cases}$$

ដូច្នេះ ដោយយក $a = 1$ គេអាចយក $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ។ ការគណនានៃ v_3 មួយ៖ យើងបានដឹងហើយថាមានវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ v ដែលទាក់ទងនឹងតំលៃផ្ទាល់ -2 មានន័យថា $f(v) = -2v$ ។
ដូច្នេះ គេអាចយក $v_3 = v$ និង $b = c = 0$ ។
ដោយដោះស្រាយ $(f + 2id)v_3 = 0$ *i.e.* $(A + 2I)v_3 = 0$ យើងបានប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} -2x \quad\quad - 2z = 0 \\ \quad\quad 3y \quad\quad = 0 \end{cases}$$

គេអាចយក $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ។
ដូច្នេះ A ដូចទៅនឹងម៉ាទ្រីស $A' = M(f)_{v_i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ និង ម៉ាទ្រីសប្តូរគោល $P = ||v_1, v_2, v_3|| = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ ។

6.9 ការីពហុធាសូន្យ ទ្រឹស្តីបទអាមីលតុន កាឡី

ដូចយើងបានឃើញទ្រឹស្តីបទ 6.5 ហើយ ដើម្បីដឹងថាអង់ដូមរភីសមួយជាអង់ដូមរភីសត្រីកោណកម្ម ត្រូវបានឈានដល់ការសិក្សាមួយនៃវិមាត្រនៃលំហវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ ការសិក្សាដែលមានប្រសិទ្ធិភាព ជាពិសេសបើប៉ារាមែ៉តដែលមាននៅក្នុងចំណោទ។
ទ្រឹស្តីបទនៃការីពហុធាសូន្យ ដែលយើងនឹងសិក្សាលំអិតនៅក្នុងវគ្គបន្ទាប់នេះ អាចអនុញ្ញាត្តិអោយទទួលបានការរកលំហផ្ទាល់ និង ការពិភាក្សាលើវិមាត្ររបស់វាដោយអោយយ៉ាងងាយទំនាក់ទនងដែលភ្ជាប់រវាងមេគុណនៃម៉ាទ្រីសដែលចំពោះម៉ាទ្រីសនេះវាអង្កត់ទ្រូងកម្ម។

កំណត់សរសេរ 6.1.

E ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយលើយកាយ $\mathbb{K}$ ។ $Q \in \mathbb{K}[X]$ ៖

$$Q(X) = a_m X^m + a_{m-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad (6.50)$$

បើ $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ គេកំណត់ $Q(f)$ ជាអង់ដូមរភីសនៃ E ដោយ

$$Q(f) := a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_1 f + a_0 id \quad (6.51)$$

ដែល

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ ដង}} \quad (6.52)$$

ចំណាំ 6.7. ថ្វីត្បិតតែប្រមាណវិធីបណ្តាក់មិនមានលក្ខណៈត្រឡប់ ប៉ុន្តែ គេបានចំពោះ $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ និង $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$

$$P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f) \quad (6.53)$$

ដោយហេតុថា យក $P(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i f^i$ និង $Q(f) = \sum_{j=1}^{m} b_j f^j$ យើងបាន

$$\begin{aligned} P(f) \circ Q(f) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i f^i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{m} b_j f^j\right) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j f^i \circ f^j \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j f^{i+j} \\ &= \sum_{i,j} b_j a_i f^j \circ f^i \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} b_j f^j\right) \circ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i f^i\right) \\ &= Q(f) \circ P(f) \end{aligned}$$

ដោយសារតែ f ជាអង់ដូមរភីសនៃ E ជាបន្ទាប់ យើងផ្តោតទៅលើពហុធា $Q \in \mathbb{K}[X]$ ដែល $Q(f) = 0$ ។ ដូចជាឧទាហរណ៍ បើ f ជាចំណោលមួយ *i.e.* បើ $f^2 = f$ គេបាន $f^2 - f = 0$ ។ ដូច្នេះ ពហុធា $Q(X) = X^2 - X$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $Q(f) = 0$ ។

និយមន័យ 6.6. យក $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ ។ ពហុធា Q មួយនៃ $\mathbb{K}[X]$ ហៅថាការីពហុធាសូន្យនៃ f បើ $Q(f) = 0$ ។

នៅក្នុងវគ្គខាងមុខ យើងនឹងបង្ហាញលទ្ធផលខាងក្រោម៖ អង់ដូមរភីស f មួយជាអង់ដូមរភីសត្រីកោណកម្ម លុះត្រាតែមានការីពហុធាសូន្យមួយនៃ f ជាពហុធាសាំងដេ និង មានតែរឺសធម្មតា។ ដូច្នេះជាឧទាហរណ៍ ចំណោលមួយចាំបាច់ជាអង់ដូមរភីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម ព្រោះពហុធា $Q(X) = X(X-1)$ ជាពហុធាសាំងដេ និង មានតែរឺសធម្មតា។

ដូចគ្នាដែរ គេអោយអង់ដូមរភីស f មួយនៃ E ដែល $f^3 = f$ ។ គេអាចបង្ហាញថា $E = E_0 \oplus E_1 \oplus E_{-1}$ ។ ដូច្នេះ f ជាអង់ដូមរភីសអង្កត់ទ្រូងកម្មព្រោះ E ជាផលបូកផ្ទាល់នៃលំហាវិចទ័រផ្ទាល់។ ទ្រឹស្តីដែលយើងទើបតែរៀបរាប់ អោយយ៉ាងងាយលទ្ធផលនេះព្រោះ $Q(X) = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ ជាការីពហុធាសូន្យនៃ f ។

ចំណេះដឹងនៃការីពហុធាសូន្យអោយព័តមានទៅលើ ស្ពិចនៃ f ។

សំណើ 6.5. Q ជាការីពហុធាសូន្យនៃ f ។ ដូច្នេះ តំលៃផ្ទាល់នៃ f កើតឡើងក្នុងចំណោមរឹសនៃ Q ។

សំរាយបញ្ជាក់

យក λ ជាតំលៃផ្ទាល់មួយនៃ f ។ ដូច្នេះមានវិចទ័រផ្ទាល់ v មួយដែល $f(v) = \lambda v$ ។ យើងបាន

$$f^2(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

ដូច្នេះយើងបាន

$$\begin{array}{rcl} f(v) & = & \lambda v \\ f^2(v) & = & \lambda^2 v \\ f^3(v) & = & \lambda^3 v \\ & \vdots & \\ f^k(v) & = & \lambda^k v \end{array}$$

យក $Q(X) = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ ជាការីពហុធាសូន្យមួយ។ យើងបាន $Q(f) = 0$ មានន័យថា

$$a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_1 f + a_0 id = 0$$

ដោយអនុវត្តន៍ទំនាក់ទំនងនេះទៅនឹងវិចទ័រ v យើងបាន

$$(a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_1 f + a_0 id)v = 0$$

រួច

$$(a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0)v = 0$$

ដោយសារតែ $v \neq 0$ ដូច្នេះ យើងបាន $a_m \lambda^m + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ *i.e.* $Q(\lambda) = 0$ ។

ដូច្នេះ ជាឧទាហរណ៍ ចំណោលមួយ 0 រឺ 1 (រឺ 0 និង 1) ។ បើ f ជាអង់ដូមរភីសដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f^3 = f$ តំលៃផ្ទាល់របស់វាអាចយតែ $0, 1$ រឺ -1 ។

យើងសង្កេតឃើញថារឹសទាំងអស់នៃ Q មិនចាំបាច់ជាតំលៃផ្ទាល់។ ជាឧទាហរណ៍ id ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $id^2 = id$ មិនមាន 0 ជាតំលៃផ្ទាល់ទេ។

សំណួរដំបូងដែលត្រូវដាក់គឺដឹងថាចំពោះគ្រប់អង់ដូមរភីស f មានការីពហុធាសូន្យនៃ f ផ្សេងពីពហុធាសូន្យ។ ចំលើយទៅនឹងសំណួរនេះគឺវិជ្ជមាន។ បើ $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ គេបាន $\dim_{\mathbb{K}}(End_{\mathbb{K}}(E)) = n^2$ ។ ដូច្នេះ គ្រប់គ្រួសារនៃ $n^2 + 1$ ជាអង់ដូមរភីភ្ជាប់។ ជាពិសេស អង់ដូមរភីស $id, f, f^2, \cdots, f^{n^2}$ ជាគ្រួសារភ្ជាប់។

ដូច្នេះ មាន $a_0, a_2, a_3, \cdots, a_{n^2} \in \mathbb{K}$ ដែល

$$a_0 id + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{n^2} f^{n^2} = 0$$

ទំនាក់ទំនងនេះមានន័យថា ពហុធា

$$Q(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n^2}X^{n^2}$$

ជាការីពហុធាសូន្យនៃ f ។
ទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមនិយាយថាក្នុងចំណោមការីពហុធាសូន្យនៃ f ជានិច្ចជកាលមានពហុធាសំគាល់។

ទ្រឹស្តីបទ 6.7. យក $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ និង $P_f(X)$ ជាពហុធាសំគាល់នៃ f ។ ដូច្នេះ គេបាន

$$P_f(f) = 0 \tag{6.54}$$

ចំណាំ 6.8. ដូចយើងនឹងបានឃើញនៅផ្នែកបន្ទាប់ ទ្រឹស្តីបទ អាមីលតុន កៃឡីអនុញ្ញាត្តិពង្រីកយ៉ាងទូលំទូលាយអាល់ហ្គោរីតមួយដែលអោយគ្រប់ការីពហុធាសូន្យទាំងអស់នៃ f ។ ដូច្នេះ គេអាចដឹងថាក្នុងចំណោមការីពហុធាសូន្យ មានការីពហុធាសូន្យមួយដែលគ្មានរីសធម្មតា។

សំរាយបញ្ជាក់

ជាដំបូង ឧបមាថា $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ។ ក្នុងករណីនេះ f ជាអង់ដូមរភីសត្រីកោណកម្ម។ យក $\{e_i\}$ ជាគ្រួសាមួយនៃ E ដែល

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

យើងបាន

$$P_f(X) = (\lambda_1 - X)(\lambda_1 - X)\cdots(\lambda_n - X)$$

ដូច្នេះ យើងត្រូវបង្ហាញថា

$$(\lambda_1 id - f) \circ (\lambda_2 id - f) \circ \cdots \circ (\lambda_n id - f) = 0$$

យើងយក

$$g_i = (\lambda_1 id - f) \circ \cdots \circ (\lambda_i id - f)$$

យើងនឹងបង្ហាញតាមវិចារណ៍ដោយកំណើនថា g_i ស្មើសូន្យ ត្រង់ $e_1, e_2, \cdots, e_i$ ។
ចំពោះ $i = n$ យើងនឹងទទួលបានទ្រឹស្តីបទ 6.7 ។

ចំពោះ $i = 1$ យើងបាន

$$g_1(e_1) = (\lambda_1 id - f)e_1 = \lambda_1 e_1 - f(e_1) = 0$$

ឧបមាថា $g_{i-1}(e_1) = 0, \cdots, g_{i-1}(e_{i-1}) = 0$ ហើយ យើងបង្ហាញថា

$$g_i(e_1) = 0, \cdots, g_i(e_i) = 0$$

យើងបាន $g_i = g_{i-1} \circ (\lambda_i id - f) = (\lambda_i id - f) \circ g_{i-1}$ ។ ដូច្នេះ

$$g_i(e_1) = 0, \cdots, g_i(e_{i-1}) = 0$$

យើងនៅសល់តែបង្ហាញថា $g_i(e_i) = 0$ ។ យើងបាន

$$g_i(e_i) = g_{i-1}(\lambda_i e_i - f(e_i))$$

ត្បិត

$$M(f)_{e_i} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & f(e_i) & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda 1 & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & e_n \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.55}$$

ឯកសារពិគ្រោះ

[1] J.C. Belloc, *Mathématiques, Algèbre*. Masson, 2e Edition, 1992.

[2] W. Keith Nicholson, *Linear Algebra with Applications*. McGraw-Hill Ryerson, 2006.

[3] J. Grifone, *Algèbre Linéaire*. Cépaduès, 1990.